数学の定理 4.1 区間 I において上に凸な関数 $f(x)$ は,

(i) I の内点において連続.

(ii) I から高々可算個の点を除いた集合 I^* の上で連続的微分可能.

(iii) I の内点において左右の微係数 $D_x^{\pm} f(x)$ が存在し，それは微係数の左右の極限値に等しい：

$$D_x^{\pm} f(x) = \lim_{\epsilon \to +0} f'(x \pm \epsilon) \equiv f'(x \pm 0) \equiv \frac{df(x \pm 0)}{dx}. \tag{4.19}$$

(iv) I の内点 x では,

$$f'(x-0) \geq f'(x+0). \tag{4.20}$$

(v) I の任意の 2 つの内点 a, b について，$a < b$ であれば

$$f'(a+0) \geq f'(b-0). \tag{4.21}$$

この定理の (iii) により，凸関数については，$D_x^{\pm} f(x)$ の代わりに $f'(x \pm 0)$ が使える．$D_x^{\pm} f(x)$ という記号はちょっと見づらいので，本書では $f'(x \pm 0)$ という記号を（それで済ませられるところは凸関数に限らず）使うことにする．また，(4.20), (4.21) を合わせると,

$$a < b \text{ であれば } \ f'(a-0) \geq f'(a+0) \geq f'(b-0) \geq f'(b+0) \tag{4.22}$$

となるから，$\boldsymbol{f'(x-0), f'(x+0)}$ **はそれぞれ減少関数である**．特に，$\boldsymbol{f(x)}$ **が微分可能な** $\boldsymbol{I^*}$ **の上では** $\boldsymbol{f'(x)}$ **は連続な減少関数である**．この定理の意味を納得するために，必ず次の問題をやってみよ：

問題 4.4 この定理が，図 4.2 の関数で確かに成り立っていることを確認せよ.

また，この定理を逆にしたような次の定理も成り立ち，与えられた関数が凸関数であるかどうかを調べるのに有用である：

数学の定理 4.2 区間 I において関数 $f(x)$ が連続で，I から高々可算個の点を除いた集合 I^* の上で微分可能で，$f'(x)$ が I^* の上で減少関数であれば，$f(x)$ は上に凸である.

特に，もしも区間 I において関数 $f(x)$ が 2 階微分可能であれば，これらの定理は単純な

$$I \text{ の各点で } f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ が上に凸}. \tag{4.23}$$

という（高校で習った）定理に帰着する．これを用いれば次の問題は簡単だろう：

問題 4.5 次の関数が上に凸であることを確かめよ： (i) $f(x) = -x^2$ $(-\infty < x < \infty)$, (ii) $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$, (iii) $f(x) = \sqrt{-x}$ $(x \leq 0)$.

また，数学の定理 4.1 から，次のことも直ちに分かるだろう（点 x_* から，定理 4.1 の結果を守ったままグラフを左右に繋いでいくことを考えてみよ)：

数学の定理 4.3 区間 I において上に凸な関数 $f(x)$ について,

(i) I の内点 x_* において

$$f'(x_*+0) \leq 0 \leq f'(x_*-0) \tag{4.24}$$

であれば,

$$f(x_*) \geq f(x) \quad \text{for all } x \in I. \tag{4.25}$$

つまり，x_* において $f(x)$ は最大値をとる.

(ii) 特に x_* において微分可能な場合には $[f'(x_*+0) = f'(x_*-0) = f'(x_*)$ なので]，これは次のように簡単になる：I の内点 x_* において $f'(x_*) = 0$ ならば，x_* において $f(x)$ は最大値をとる.

(iii) これらの条件を満たす x_* が I の中には無い場合には，I の端点のうちのいずれかで，$f(x)$ は上限値をとる.

ここで注意すべきことは，$f(x)$ のてっぺんが平らに（直線状に）なっている場合には，その平らになっている範囲の全ての x で $f(x)$ は最大値をとることである．つまり，最大値を与える x_* は１点とは限らず，区間になっていることがある．また，次の定理もグラフを想像すれば自明だろう（証明は下の問題）：

数学の定理 4.4 １変数関数 $f(x), g(x)$ を，区間 I で上に凸な関数とする．このとき，次の関数 $h(x)$ も，括弧内に記した区間内で上に凸である．

(i) c を正定数として，$h(x) \equiv cf(x) \quad (x \in I)$

(ii) X を定数として，$h(x) \equiv f(X-x) \quad (X-x \in I)$

(iii) $h(x) \equiv f(x) + g(x) \quad (x \in I)$

(iv) X を定数として，$h(x) \equiv f(x) + g(X-x) \quad (x, X-x \in I)$

(v) $h(x) \equiv \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in I)$

問題 4.6 この定理を証明せよ．

4.2.2 多変数の凸関数

前節では１変数の凸関数について述べたが，多変数の凸関数も同様に定義できる．そのとき気を付ける点は，２点の中間の点が f の定義域に入っているかどうかだけである．即ち，$\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ と略記すると，

数学的定義： 多変数関数 $f(\vec{x})$ が次の条件を満たすとき，**上に凸** (concave) であると言う：f の定義域 D の中の任意の２点 $\vec{a}, \vec{b}$ と，$0 < \lambda < 1$ の範囲の任意の実数 λ について，その中間の点 $\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}$ も D の中にあり[6]，

$$f(\lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b}) \geq \lambda f(\vec{a}) + (1-\lambda) f(\vec{b}). \tag{4.26}$$

同様に，この式の不等号が逆向きのとき，**下に凸** (convex) であると言う．

たとえば２変数関数 $f(x,y)$ であれば，f の定義域 D の中の任意の２点 $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ と，$0 < \lambda < 1$ の範囲の任意の実数 λ について，その中間の点 $(\lambda x_a + (1-\lambda)x_b, \lambda y_a + (1-\lambda)y_b)$ も D の中にあり

$$f(\lambda x_a + (1-\lambda)x_b, \lambda y_a + (1-\lambda)y_b) \geq \lambda f(x_a, y_a) + (1-\lambda) f(x_b, y_b) \tag{4.27}$$

ということである．特に，この式で $y_a = y_b \equiv y$ とおくと，

$$f(\lambda x_a + (1-\lambda)x_b, y) \geq \lambda f(x_a, y) + (1-\lambda) f(x_b, y) \tag{4.28}$$

と y が揃った式を得る．これは，f が x の関数として上に凸であることを示している．同様にして，y の関数としても上に凸であることが言える．ゆえに，上に凸な２変数関数は，個々の変数についても（残りの変数を固定したときに）上に凸である．多変数関数でも同様だから，

数学の定理 4.5 上に凸な多変数関数 $f(\vec{x})$ は，その各々の変数 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ についても上に凸である．

また，１変数関数の時の数学の定理 4.4 (p.46) に対応して，次のことも言える（証明は下の問題）：

[6] このような領域 D は**凸集合** (convex set) であると言う．