

EPRパラドックスからベルの不等式へ

清水 明

東京大学大学院 総合文化研究科

<http://as2.c.u-tokyo.ac.jp>

テキストを読みたい方は：

日本物理学会編「アインシュタインと21世紀の物理学」

(日本評論社 2005年) 第7章

アインシュタインの Creative Error

物理学の進歩 by 試行錯誤、紆余曲折、遠回り、...

アインシュタインの1935年の論文

- 後に**誤り**だと分かったが、**量子論の本質**を鋭く突いた
- 量子論に関する**理解を飛躍的に深めた**
- **ベルの不等式の発見** (J.S. Bell, 1964)
量子論の本質を初めて明らかにした「**最も深淵な発見**」

ときとして誤りが物理の進歩の原動力になる

正しいが重要でない理論 << 間違っているが本質を突いた理論
creative error (創造的誤り)

この、アインシュタインの偉大な creative error の話をします

EPRパラドックス

A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen

Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?

(物理的実在の量子力学的記述は完全だとみなせるか？)

Physical Review 47 (1935) 777.

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the **description of reality as given by a wave function is not complete.**

完全な理論には、**実在**のそれぞれの要素に対応する要素が、理論の中にあるべきである。

ある物理量が「実在する」と言えるための十分条件は何かというと、その物理量を有する系の状態を乱すことなしに、その物理量を確実に予言することが可能であることだ。

量子論においては、位置と運動量のような交換しない2つの演算子で表される2つの物理量の場合には、一方の物理量に関する知識を得ることは、もう一方に関する知識を得ることを排除してしまう。

となれば**量子論が正しいとすると**、次のうちのどちらかだ：

- (1) 量子論の波動関数による実在の記述は完全ではない。
- (2) このような2つの物理量は同時には実在しえない。

どちらが真であるかを判定するために、過去に相互作用したことがある2つの系の一方を測定することにより他方の系に関する予言を行う、という**思考実験**を考えた。

これを分析することにより、次の結果が得られる：

もしも(1)が偽であれば（波動関数による記述が完全であれば）
(2)も偽である（交換しない2つの物理量がどちらも実在する）。

しかるに、量子論が正しいとすると、(1)か(2)のどちらかは真であるはずで、両方が偽というのはいり得ない。

だから、量子論が正しいとすると(1)は真であると考えよりない。
即ち、量子論の**波動関数による実在の記述は完全ではない**。

- Einstein-Podolsky-Rosen のパラドックス (EPRパラドックス) と呼ばれるようになった。
- アインシュタインたちは、このことを「パラドックス」とは言っていない。彼らの考えでは、これは量子論が不完全であることの確固たる証拠だった。
- 「量子論は間違っている」という主張ではない！

アインシュタインたちの主張は、
量子論は正しいかもしれないが、完全な理論ではない
ということ。

Einstein-Podolsky-Rosen の思考実験

きちんと計算するとどうなるかは、テキストの7.10節に記しました。

量子論が正しいとする。

1次元空間を運動する2粒子の系を考える。



x_2 と p_2 は交換しないので、不確定性原理 $\delta x_2 \delta p_2 \geq \frac{\hbar}{2}$ のために、 x_2 に関する知識を得たら、 p_2 に関する知識は得られない。

となれば、次のうちのどちらかだ：

- (1) 波動関数による実在の記述は完全ではない。
- (2) x_2 と p_2 は同時には実在しえない。

どちらが真であるかを判定するために、次の状態を考える：

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2) &\propto \int e^{ik(x_1-x_2+x_0)} dk \quad (x_0 \text{ は適当な定数}) \\ &= \int e^{ikx_1} e^{-ik(x_2-x_0)} dk.\end{aligned}$$

粒子1の運動量 p_1 の測定を行い、その測定値が $p_1 = p_*$ だったとする。



波数 k と運動量 p の間のド・ブロイの関係式

$$p = \hbar k \quad (\hbar \equiv \text{プランク定数}/2\pi)$$

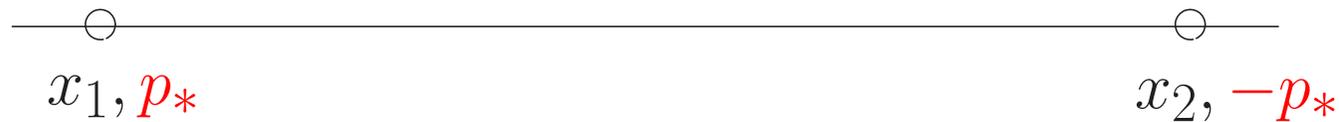
と射影仮説（波束の収縮）より、測定後の波動関数は、

$$\Psi_{p_*}(x_1, x_2) \propto e^{ik_*x_1} e^{-ik_*(x_2-x_0)}$$

これは、粒子2の運動量 p_2 を表す演算子 $\hat{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2}$ の固有関数：

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi_{p_*}(x_1, x_2) = -\hbar k_* \Psi_{p_*}(x_1, x_2) = -p_* \Psi_{p_*}(x_1, x_2).$$

従って、粒子2の運動量は確実に $p_2 = -p_*$ という値を持つ。



こうして、粒子1の運動量を測ることにより、粒子2の運動量の値を知ることができた。

測ったのは粒子1の方だから、粒子2の状態はいっさい乱されないはずである。これは、我々の「実在」の基準

その物理量を有する系の状態を乱すことなしに、その物理量を確実に予言することが可能であること

を満たしているので、粒子2の運動量 p_2 は実在している。

今度は粒子1の位置を測った場合を考える。

デルタ関数についての公式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk$$

を用いて、測定前の波動関数を書き直しておく：

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &\propto \delta(x_1 - x_2 + x_0) \\ &= \int \delta(x_2 - (x + x_0)) \delta(x_1 - x) dx \end{aligned}$$

粒子1の位置 x_1 の測定を行い、その測定値が $x_1 = x_*$ だったとする。



射影仮説より、この場合の測定後の波動関数は、

$$\Psi_{x_*}(x_1, x_2) \propto \delta(x_2 - (x_* + x_0)) \delta(x_1 - x_*)$$

これは、粒子2の位置 x_2 を表す演算子 $\hat{x}_2 = x_2$ の固有関数：

$$\hat{x}_2 \Psi_{x_*}(x_1, x_2) = x_2 \Psi_{x_*}(x_1, x_2) = (x_* + x_0) \Psi_{x_*}(x_1, x_2).$$

従って、粒子2の位置は確実に $x_2 = x_* + x_0$ という値を持つ。



こうして、粒子1の位置を測ることにより、粒子2の位置を知ることができた。

測ったのは粒子1の方だから、粒子2の状態はいっさい乱されないはずである。これは、我々の「実在」の基準を満たしているので、粒子2の位置 x_2 も実在している。

こうして、量子論が正しいとすると、 x_2 と p_2 はどちらも実在することになる。

従って、次のことを示せた：

もしも (1) が偽であれば（波動関数による記述が完全であれば）、
(2) も偽である（交換しない2つの物理量がどちらも実在する）。

しかるに、量子論が正しいとすると、(1)か(2)のどちらかは真であるはずで、両方が偽というのはいり得ない。

だから、量子論が正しいとすると(1)は真である。即ち、
量子論が正しいとすると波動関数による実在の記述は完全ではない。

故に、

量子論は正しいかもしれないが、完全な理論ではない！

EPR論文の影響は絶大だった

N. Bohr

Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?

Physical Review 48 (1935) 696.

アインシュタイン、ポドルスキー、ローゼンによる上記のタイトルがつけられた最近の論文において定式化された、ある種の「物理的実在の規準」は、量子現象に適用された場合には、本質なあいまいさを含んでいる。これに関して相補性と名付けられた観点を説明する。この観点から、物理現象の量子力学的な記述は、その能力の及ぶ範囲で、完全性に対するすべての合理的な要求を満たすと考えられる。

- 2粒子系と測定装置は分離不能
- そのために、 p_1 を測ることと x_1 を測ることは、排他的

E. Schrödinger

Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik
(量子力学の現状)

Naturwissenschaften 23 (1935) 807, 823, 844.

- 量子論を認めれば、確かに遠く離れた2地点で起こる物理現象に関する予言や知識が分離不能になって絡み合う。(entanglement of predictions or our knowledge of the two bodies)
- 量子論を認めれば、猫が生きている状態と死んでいる状態の重ね合わせ状態というような「ばかげた」ことを考えることさえできる。(猫のパラドックス)

「現在の量子論には確かに不満足な面がある」という論調 (“general confession”)

「物理的実在の完全な記述」とは何か？

EPR論文は次の言葉で締めくくられている：

我々は、波動関数では物理的実在の完全な記述を行えないことを示したわけだが、そのような完全な記述が存在するか否かは、未解明な問題として残っている。しかし我々は、**物理的実在を完全に記述できる理論**が存在すると信じている。



これはどういうものか？

- EPR論文の要旨に書かれた「完全な理論」の基準を満たす理論
→ ボーアが指摘したように曖昧さが潜んでいる
- アインシュタインはそのような理論が構築できないまま他界した
→ 中身は誰にも（彼自身にも）分からない

しかし、次のような基本仮定に基づく理論と思われる：

詳しくは：清水明「新版 量子論の基礎第2章」

- (i) すべての物理量は、どの瞬間にも、各々ひとつずつ定まった値を持っている（「実在」している。）
- (ii) 測定とは、その時刻における物理量の値を知る（確認する）ことである。即ち、「物理量の測定値」＝「その時刻における物理量の値」である。
- (iii) ある時刻における物理状態とは、その時刻における全ての物理量の値の一覧表のことである。
- (iv) 時間発展とは、物理量の値が時々刻々変化することである。

これを、（素朴）実在論と言う。

これは、あたりまえでは？

量子論以前は全て実在論だった：

- 物理のすべての理論（力学・電磁気学・相対論・熱力学...）
- 化学・生物・天文学・工学...
- 素朴な直感・無意識に信じていること...

実は、量子論では (i) ~ (iv) の全てが否定され変更された！

量子論以前の物理（古典論）から量子論への移行
= 人類が信じていたことの根本的な部分の大変革

表面上の違いならば、量子論と古典論は似ているが、熱力学は全然違う。

量子論の基本原則 (すべての量子論に共通な基本原則)

詳しくは：清水明「新版 量子論の基礎第2章」

着眼点

ひとつの物理状態に、 ψ という名前を付けたとする。

実験によると、ひとつの物理量 A を同じ ψ について測定しても、測定値 a は測定の度にばらつく。

しかし、同じ ψ を用意しては A を測定する、ということを繰り返して求めた測定値の確率分布 $\{P(a)\}$ は定まっている。

別の状態について測れば確率分布は変わる。同じ状態でも測る物理量を変えれば変わる。

→ 確率分布は ψ と A に依存する量、つまり ψ と A の関数。

A の測定値がばらつかずに何回やっても同じ値になる状態もある。しかし、その場合は、必ず他の何かの物理量の測定値がばらつく。

→ 全ての物理量が確定値をもつような状態は存在しない。

量子論は、これらは自然の本性であるという立場をとり、定まっている部分である確率分布 $\{P(a)\}$ を、 ψ と A の関数として計算する理論体系として定式化された。

また、どんな実験をしても区別できない状態は同じ状態と考える：

定義： 2つの状態 ψ, ψ' について、どんな物理量の測定値の確率分布も一致すれば、 ψ と ψ' は同じ状態である。

これにより、不毛な論争が避けられる。

- (i) 全ての物理量が、各瞬間瞬間に、定まった値を持つことは一般にはない。従って、各々の物理量は、ひとつの数値をとる変数ではない、何か別のもので（たとえば「演算子」で）表す。
- (ii) 物理量 A の測定とは、観測者が測定値をひとつ得る行為である。得られる測定値 a の値は、同じ物理状態について測定しても、一般には測定の度にばらつく。しかし、確率分布 $\{P(a)\}$ は、 A と ψ から一意的に定まる。
- (iii) 物理状態 ψ とは、任意の物理量の（仮にその時刻に測ったとしたら得られるであろう）測定値の確率分布を与える「写像」である：
- $$\psi : A \mapsto \{P(a)\}.$$
- (iv) 系が時間発展するとは、測定を行った時刻によって異なる $\{P(a)\}$ が得られる、ということである。これは、 $A \rightarrow A(t)$ としても良いし、 $\psi \rightarrow \psi(t)$ としても良い。

実在論（古典論）の根本的な考え方がすべて否定され変更された！

→ 量子論の登場は、科学や技術、ひいては人間の世界観の根っこを完全に変更してしまうほどの大変革だった。

特に、量子論では「状態」「物理量」「物理量の測定値」が分離した

→ たとえ状態を完全に指定しても、物理量の測定値が確率分布することがありうるようになった。

実在論（古典論）では、「状態」 = 「物理量」 = 「物理量の測定値」

→ もしも物理量の測定値が確率分布するような状況があったとしたら、それは状態の指定が不完全だったと考えるしかない。

→ アインシュタインの不満

実在論から量子論へというような大変革は本当に必要なのか？

実在論に基づく新しい理論を構築する試みが始まった：

実験結果が確率的にばらつくのは、何か見逃している変数（隠れた変数）があり、その値が実験の度に違う値をとっているためでは？つまり、状態の指定が不完全なのでは？

しかし、ほとんどの物理学者は、

- (a) どうせ量子論と同じ答えを出すはずだから、量子論の方がシンプルで良い。
- (b) 「隠れた変数」のような、未だかつて観測にかかったことのないような変数を理論に入れるのは科学的でない。
→ 本質的でない（今や量子論でもそういう変数を入れる）

もしも赤字部分が本当であれば、大変革は必要ではなく、便宜上のもことになる。もしも本当ならば...

量子論と同じ答えを出す实在論は存在するのか？

物理の根本のところ、さらには人間の世界観の根本のところに、
大変革は必要なのだろうか？

日本では...

そもそも、次の3つの区別がついておらず、「観測問題」という一言
でくくって無意味な議論とみなしていたらしい：

- (i) **上の大きな問題** ← **実験で決着できる**ことが判明する！
- (ii) 量子論を正しく適用するために**必須**の問題である**量子測定理論**
← **実験で決着できる**！
- (iii) 永久に実験では検証できない（悪い意味での）**哲学的問題**

欧米では...

科学的な分析がずっと続けられていた。

J. S. Bell

On the Einstein Podolsky Rosen paradox

Physics 1 (1964) 195

ベルの不等式 (様々なバージョンあり):

適当な物理量の組のある相関 C について、原因と結果が逆転したりしないまともな理論の範囲内では、

$$-2 \leq C \leq 2$$

を **どんな** 実在論も満たす。しかし、量子論は破る場合がある。

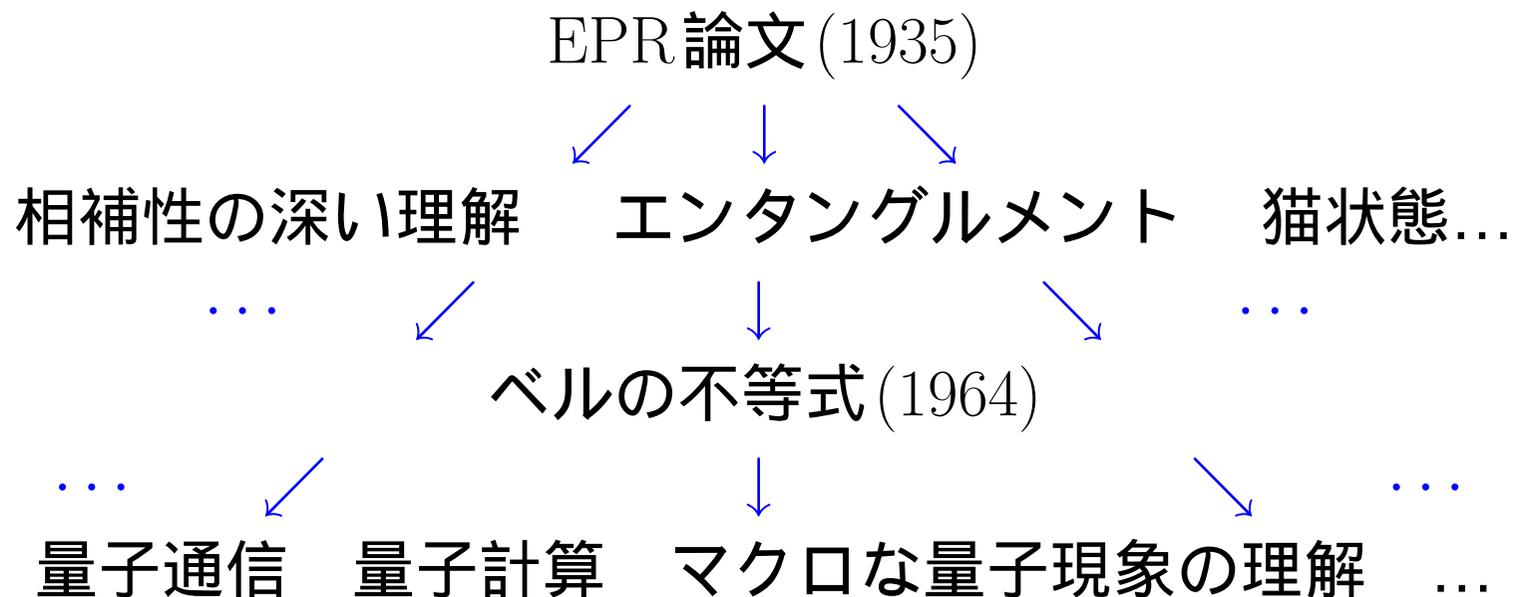
→ **量子論と完全に同じ答えを出す実在論は存在しない!**

後に**実験により**、ベルの不等式の破れが確認された ($C \simeq 2.8$)

→ **実在論を捨てない限り**, 決して説明できない自然現象がある。

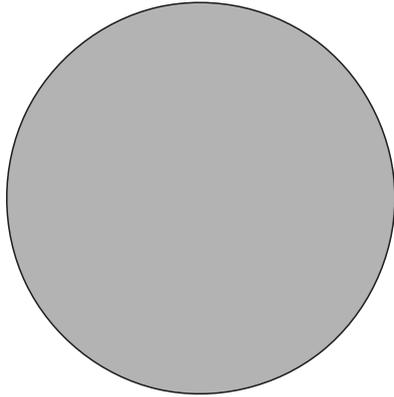
- 実在論の破綻と量子論の本質を、最も明確にえぐり出した。
- 人類は、自然現象を相手にする限り、古典的世界観（実在論）からの決別が必須であるという衝撃的事実を突きつけられた。
- 一見すると（悪い意味での）哲学的な命題にすぎないようにも見えた命題が、実験で判定できるようになった。

最も深遠な発見とも言われる。

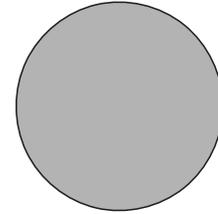


ベルの不等式について

詳しくは：清水明「新版 量子論の基礎第8章」



$A(\theta)$
 $A(\theta')$



$B(\phi)$
 $B(\phi')$

$$C \equiv \langle A(\theta)B(\phi) \rangle + \langle A(\theta')B(\phi) \rangle - \langle A(\theta)B(\phi') \rangle + \langle A(\theta')B(\phi') \rangle$$

$$-2 \leq C \leq 2$$

証明： 高校レベルの数学で3分ですむ！

しかし...

- 問題の本質を簡単な数学で論じられるところにまで還元する
- その簡単な数式の意味するところを見抜く

は、天才だけがなせる技！

意味・内容：ひとたび天才が解説してくれば、我々凡才にも判る。

しかし...

- 時間がかかる。(拙著でも、第2章 + 第8章 = 合計35ページ！)
- 中途半端な説明はひたすら誤解を招くだけ。

最終的に意味するところ：

自然現象を相手にする限り、古典的世界観(実在論)からの決別が必須である！

おわりに

EPR論文は**結果的には誤り**だった。

しかし、それが物理学の、ひいては**人類の世界観を変えてしまう**ほどの、恐ろしいまでに大きな影響を与えた。

EPR論文や、それに触発されて書かれたシュレディンガーやベルの論文は、その後、様々な新しい研究分野を生み出した（[Macroscopic Quantum Coherence](#), [量子通信](#), [量子計算](#), ...）

アインシュタインほどの天才が深く考え、正しいと信じた事は、たとえ間違っているとしても、かくも偉大な業績であった。

まさに、**史上最大の Creative Error**