孤立量子系における熱平衡化現象

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
上田研究室　濱崎立資

清水研究室　根掘り葉掘りセミナー

Outline

1. イントロダクション
2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論
   ・熱平衡化の定義と目標
   ・Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. 非可積分系のクエンチと熱平衡化
   ・非可積分性とETHや熱平衡化との対応　・緩和しないケース
4. 可積分系のクエンチと非熱的な分布
   ・一般化Gibbs分布　・局所物理量の重要性　・近年の発展
5. その他の話題
   ・Many-body localization　・非平衡過程（相関の伝搬）

Outline

1. イントロダクション
2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論
   - 熱平衡化の定義と目標
   - Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. 非可積分系のクエンチと熱平衡化
   - 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
   - 緩和しないケース
4. 可積分系のクエンチと非熱的な分布
   - 一般化Gibbs分布
   - 局所物理量の重要性
   - 近年の発展
5. その他の話題
   - Many-body localization
   - 非平衡過程（相関の伝搬）

孤立系での統計力学の基礎づけ

- ミクロな理論→ 熱力学の基本関係式
  マクロ変数の平衡値・揺らぎ

- 力学変数 $\hat{\mathcal{O}}$ …等重率の原理

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\text{熱平衡}} = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}} \hat{\mathcal{O}}] \qquad \hat{\rho}_{\mathrm{mic}} = \frac{1}{d_{E,\Delta E}} \sum_{|E_\alpha - E| < \Delta E} |E_\alpha\rangle \langle E_\alpha|$$

ミクロカノニカル分布

- ミクロな動力学から熱平衡化を正当化したい

$$\langle \psi(0) | \hat{\mathcal{O}} | \psi(0) \rangle \xrightarrow{\quad} \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}} \hat{\mathcal{O}}]\,?$$

ユニタリー時間発展

孤立量子系の熱平衡化の歴史

1926: Schrodinger方程式

1929: J. von Neumann

"Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik"

1950年代: 誤解によるvon Neumannの仕事の批判

1990年代: J. M. Deutsch (1991); M. Srednicki (1994);

H. Tasaki (1998); etc…

2000年代: 冷却原子実験、典型性、ETH、GGE、…

2010: S. Goldsteinらのvon Neumannの論文の再発見

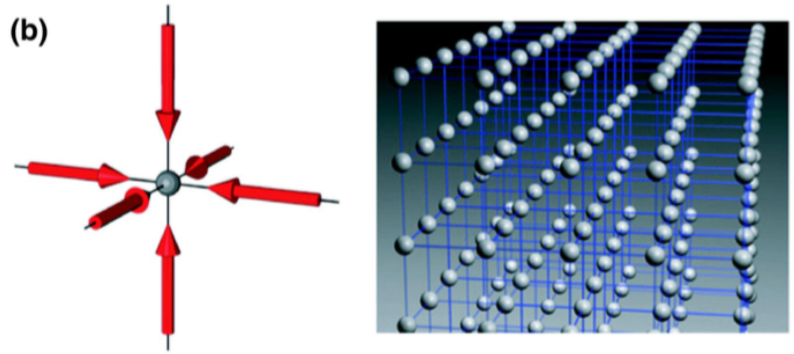
孤立量子系の実現

- 冷却原子系：
  ・mK以下に冷却した原子集団を
  真空中に閉じ込め
  ・高い制御性（相互作用パラメータなど）

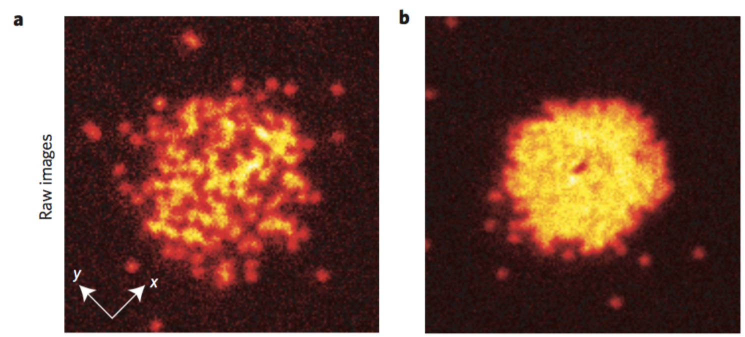
- 超高真空・極低温：
  孤立量子系の実時間ダイナミクスの観測

光格子中の冷却原子系

- レーザーによる周期ポテンシャルにトラップ
  → 格子モデルの実現 (tight-binding近似)
  - 高い制御性
    格子の形の変更
    実効的な次元の制御
  - 測定技術の発展
    Time-of-flight…運動量分布
    Quantum gas microscope…
    サイトごとの粒子観測



I. Bloch et al., Rev. Mod. Phys. (2008)



J. F. Sherson et al., Nature (2010)

Outline

1. イントロダクション
2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論
   ・熱平衡化の定義と目標
   ・Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. 非可積分系のクエンチと熱平衡化
   ・非可積分性とETHや熱平衡化との対応　・緩和しないケース
4. 可積分系のクエンチと非熱的な分布
   ・一般化Gibbs分布　・局所物理量の重要性　・近年の発展
5. その他の話題
   ・Many-body localization　・非平衡過程（相関の伝搬）

孤立系の非平衡ダイナミクス

- 初期状態を用意 $\hat{\rho}_0$

初期ハミルトニアン$\hat{H}_0$の
固有状態・有限温度状態

ハミルトニアンを $\hat{H}$ に
変化（クエンチ）

- ユニタリー発展

$$\hat{\rho}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{\rho}_0 e^{-i\hat{H}t}$$

- 物理量 $\hat{\mathcal{O}}$ を測定 $\mathcal{O}(t) = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{O}}]$

cf. 古典系では相空間の点 Γ で決まる分布関数・物理量

$\rho(\Gamma), \mathcal{O}(\Gamma)$

$\rho(\Gamma, 0) \to \rho(\Gamma, t)$ Liouville方程式

$$\mathcal{O}(t) = \int d\Gamma \rho(\Gamma, t)\mathcal{O}(\Gamma)$$

熱平衡化とは？

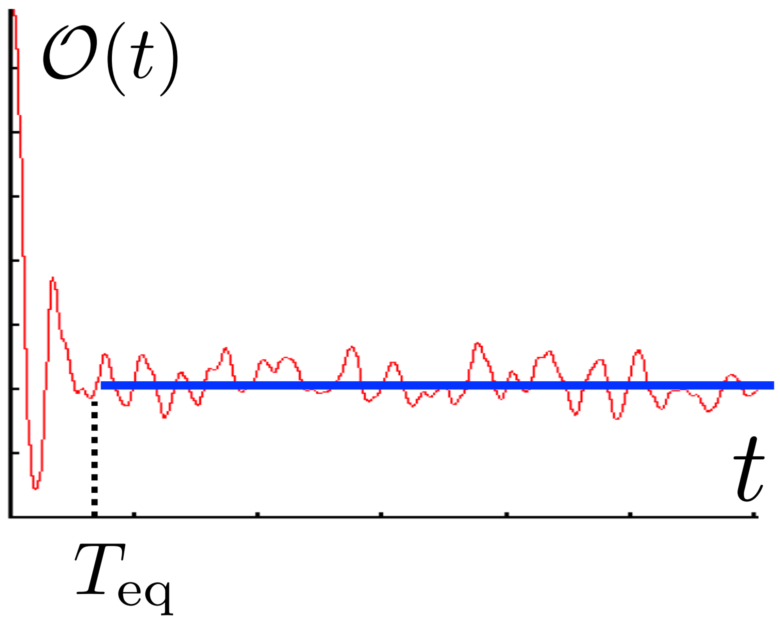
- 孤立量子系で物理量 $\hat{\mathcal{O}}$ をとる

ある緩和時間 T_{eq}が存在し

$t \geq T_{\mathrm{eq}}$ において

$$\mathcal{O}(t) \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{mic}}$$ を要求？

$$\mathcal{O}_{\mathrm{mic}} = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}}\hat{\mathcal{O}}]$$



- 再帰現象のため上式は成り立たない

任意の $\epsilon > 0$ に対しあるT_{rec}が存在し

$$||\,|\psi(T_{\mathrm{rec}})\rangle - |\psi_0\rangle\,|| \leq \epsilon$$

熱平衡化とは？

- 本セミナーでの熱平衡化の定義：

ほとんどの時刻で $\mathcal{O}(t) \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{mic}}$ の時、
「$\hat{\mathcal{O}}$ が熱平衡化する」と呼ぶことにする

古典系でも同様　$\mathcal{O}_{\mathrm{mic}} \to \int d\Gamma \rho_{\mathrm{mic}}(\Gamma)\mathcal{O}(\Gamma)$

注1：文献によって定義は異なる
注2：この定義は期待値レベルでの熱平衡化のみを議論
注3：緩和の時間スケールについては何も言及しない

熱平衡化の条件

- ほとんどの時間で $\mathcal{O}(t) \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{mic}}$ となるには？

① 定常状態へ緩和するか

$$\overline{A} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt$$

ほとんどの時間で $\mathcal{O}(t) \simeq \overline{\mathcal{O}(t)}$ を要求

$\leftarrow \Delta\mathcal{O}_t^2 := \overline{[\mathcal{O}(t) - \overline{\mathcal{O}(t)}]^2}$ が十分小さい

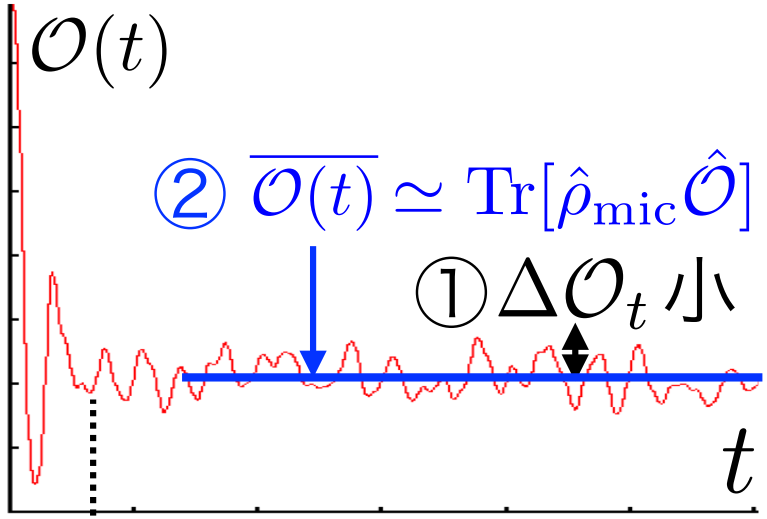
時間揺らぎ

J. von Neumann, Zeit. fur. Phys. (1929)

M. Srednicki, PRE (1994)

② 長時間平均が熱平衡分布で記述されるか

$$\overline{\mathcal{O}(t)} \simeq \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}}\hat{\mathcal{O}}]$$



- 古典系も同様

古典系での熱平衡化

- 純粋状態（相空間の一点 Γ_0）をとる

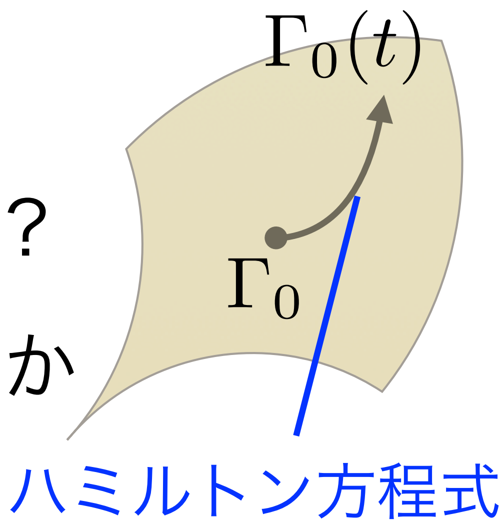
$$\rho(\Gamma, t) = \delta(\Gamma - \Gamma_0(t)) \text{ より } \mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(\Gamma_0(t))$$

① 定常状態へ緩和するか

$\Delta \mathcal{O}_t^2 = \overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))^2} - \overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))}^2$ が小さいか？

② 長時間平均が熱平衡分布で記述されるか

$\overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{mic}}$ か？



- これらが示せるかは具体的な

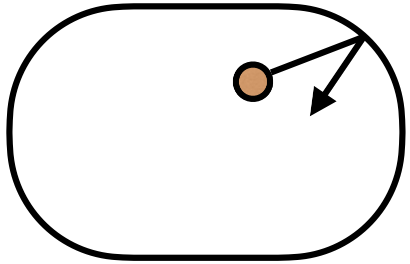
系・物理量・初期状態の情報が必要

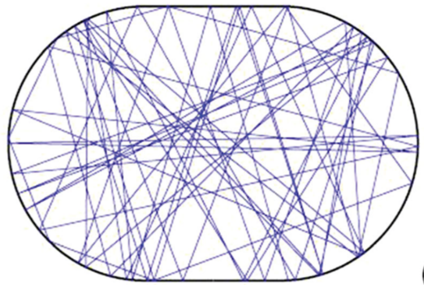
古典系での熱平衡化の条件の一例

- 初期状態 Γ_0 について

$$\overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))} = \mathcal{O}_{\mathrm{mic}},\ \overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))^2} = (\mathcal{O}^2)_{\mathrm{mic}}$$

が成り立つと仮定する





(b)

D'Alessio et al.
Advance in Physics (2016)

②は自動的に満たされる

①は

$$\Delta\mathcal{O}_t^2 = \overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))^2} - \overline{\mathcal{O}(\Gamma_0(t))}^2 = (\mathcal{O}^2)_{\mathrm{mic}} - (\mathcal{O}_{\mathrm{mic}})^2$$

$\mathcal{O}$ が $\mathcal{O} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} o_i$ のようにかければ $\Delta\mathcal{O}_t \sim \dfrac{o}{\sqrt{N}}$

マクロ物理量であれば熱平衡化

量子系での熱平衡化

- 純粋状態をとる $\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t} |\psi_0\rangle \langle\psi_0| e^{i\hat{H}t}$

$$\mathcal{O}(t) = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}(t)\hat{\mathcal{O}}] = \sum_{\alpha\beta} c_\alpha^* c_\beta e^{i(E_\alpha - E_\beta)t} \mathcal{O}_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} := \langle E_\alpha | \hat{\mathcal{O}} | E_\beta \rangle \qquad c_\alpha := \langle E_\alpha | \psi_0 \rangle$$

- エネルギー固有値についての仮定

（非縮退） $E_\alpha = E_\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

（非共鳴） $E_\alpha - E_\beta = E_\gamma - E_\delta \neq 0 \Rightarrow \alpha = \gamma, \beta = \delta$

→時間平均が実行可能

量子系での熱平衡化

- 時間平均を実行→新たな条件

①　ある定常状態へ緩和するか

$$\Delta \mathcal{O}_t^2 = \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2$$ が小さい

②　長時間平均が熱平衡分布で記述されるか

$$\sum_\alpha |c_\alpha|^2 \mathcal{O}_{\alpha\alpha} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{mic}}$$

一般には初期状態と行列要素に依存

←ETHを仮定すると初期状態の詳細に依存せず条件を達成

Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

- 物理量の行列要素に着目 $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$
  - ・$\hat{\mathcal{O}}$ についての非対角項に関するETH：

（興味あるエネルギー領域内の）

全ての $|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle$ に対し $\underset{(E_\alpha \neq E_\beta)}{\mathcal{O}_{\alpha\beta}} \to 0$ （熱力学極限）

→任意の初期状態について $\hat{\mathcal{O}}$ の定常状態への緩和を正当化

J. von Neumann, Zeit. fur. Phys. (1929);
M. Srednicki, PRE (1994)

$$\Delta\mathcal{O}_t^2 = \sum_{\alpha\neq\beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2$$

$$\leq \sum_{\alpha\beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 [\max_{\alpha\neq\beta} |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|]^2$$

$$\leq [\max_{\alpha\neq\beta} |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|]^2 \to 0$$

Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

・$\hat{\mathcal{O}}$ についての（対角項に関する）ETH

（興味あるエネルギー領域内の）　　滑らかな関数

全ての$|E_\alpha\rangle$に対し $\mathcal{O}_{\alpha\alpha} \to O_{\mathrm{m}}(E_\alpha)$ (熱力学極限)

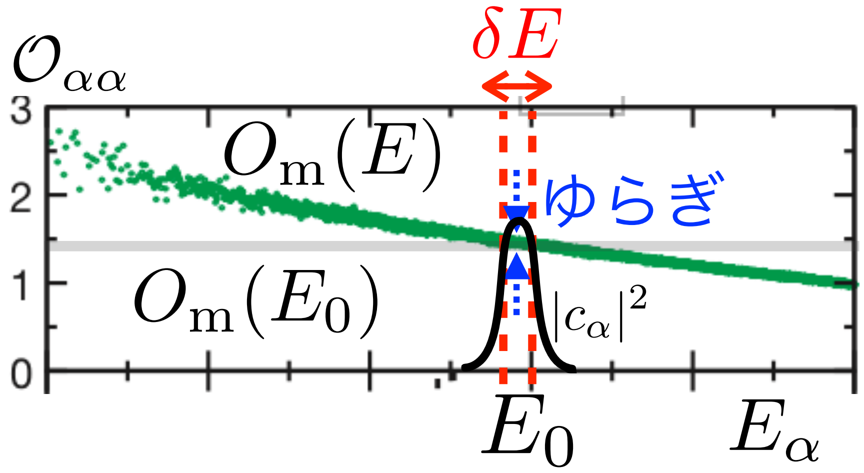
→エネルギー揺らぎの小さいすべての初期状態に対し

$\overline{\mathcal{O}(t)} \simeq \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}}\hat{\mathcal{O}}]$ を正当化

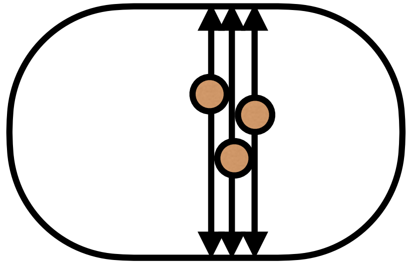
M. Rigol et al., Nature (2008)

$$\overline{\mathcal{O}(t)} = \underbrace{\sum_\alpha |c_\alpha|^2}_{=1} \underbrace{\langle E_\alpha|\hat{\mathcal{O}}|E_\alpha\rangle}_{\simeq O_{\mathrm{m}}(E_0)} \simeq \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle_{\mathrm{mic}}(E_0)$$

規格化　　ETH



古典と量子の異なる点



- 古典系
  - 熱平衡化しない初期状態が存在する
  - マクロな物理量であれば小さな時間揺らぎを持ちうる
  - その場合、時間揺らぎは $\Delta\mathcal{O}_t \sim \dfrac{o}{\sqrt{N}}$
- $\hat{\mathcal{O}}$ がETHを満たす量子系
  - （エネルギー揺らぎの小さい）
すべての初期状態に対して$\hat{\mathcal{O}}$が熱平衡化
  - $\hat{\mathcal{O}}$ はマクロでなくても熱平衡化する
  - 時間揺らぎは $\Delta\mathcal{O}_t \sim \sqrt{\max_{\alpha\neq\beta}|\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2}$（指数的に小さくなりうる）

初期状態の役割

- （ETHを仮定せずとも）
  初期状態をうまく選べば熱平衡化する
  - 時間揺らぎについて以下のことが示せる

$$\Delta\mathcal{O}_t \leq \frac{||\hat{\mathcal{O}}||}{\sqrt{d_{\mathrm{eff}}}} \qquad d_{\mathrm{eff}} := \left(\sum_{\alpha} |c_\alpha|^4\right)^{-1}$$ 有効次元

熱力学極限で $d_{\mathrm{eff}} \to \infty$ であれば
長時間平均への緩和が正当化される

  - 「長時間平均=ミクロカノニカル分布」についても
    有効次元を用いた条件が見つかっている

Outline

1. イントロダクション
2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論
   - 熱平衡化の定義と目標
   - Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. 非可積分系のクエンチと熱平衡化
   - 非可積分性とETHや熱平衡化との対応　・緩和しないケース
4. 可積分系のクエンチと非熱的な分布
   - 一般化Gibbs分布　・局所物理量の重要性　・近年の発展
5. その他の話題
   - Many-body localization　・非平衡過程（相関の伝搬）

非可積分系と可積分系

- （完全）可積分系…
  量子数の組によりエネルギー固有状態が決定
  ・自由粒子系、横磁場Ising模型、XY模型など
  （準粒子の二次形式にマップできる）
  ・XXZ模型、Lieb-Liniger模型など（Bethe ansatz）
- 近可積分系…可積分点に近い系
  ・可積分ハミルトニアン＋弱い摂動
- 非可積分系…可積分点から十分離れた系

クロスオーバー

非可積分系の熱平衡化：マクロ物理量

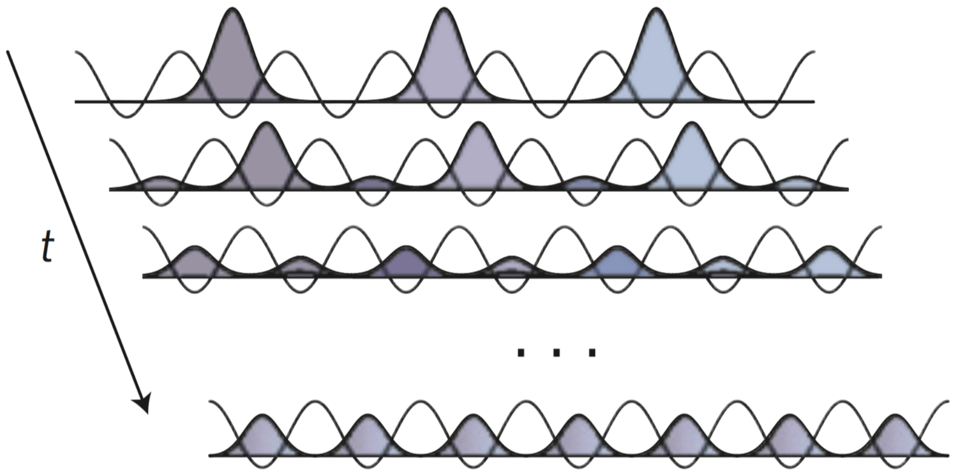
- 一次元のBose-Hubbardモデルの熱平衡化

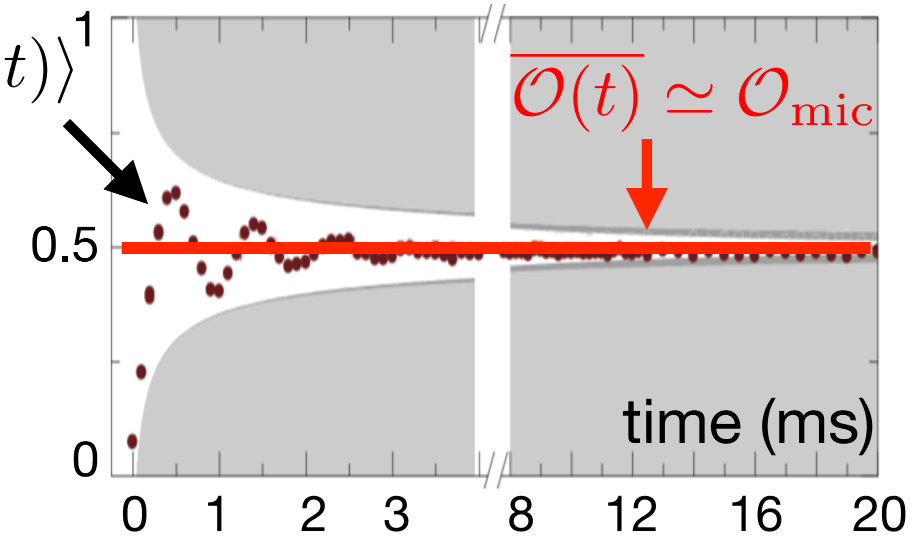
S. Trotzky et al., Nature Physics (2012)

$$\hat{H} = \sum_j \left[-J(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \mathrm{h.c.}) + \frac{U}{2}\hat{n}_j(\hat{n}_j - 1) + \frac{K}{2}\hat{n}_j j^2 \right]$$

$$\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$$

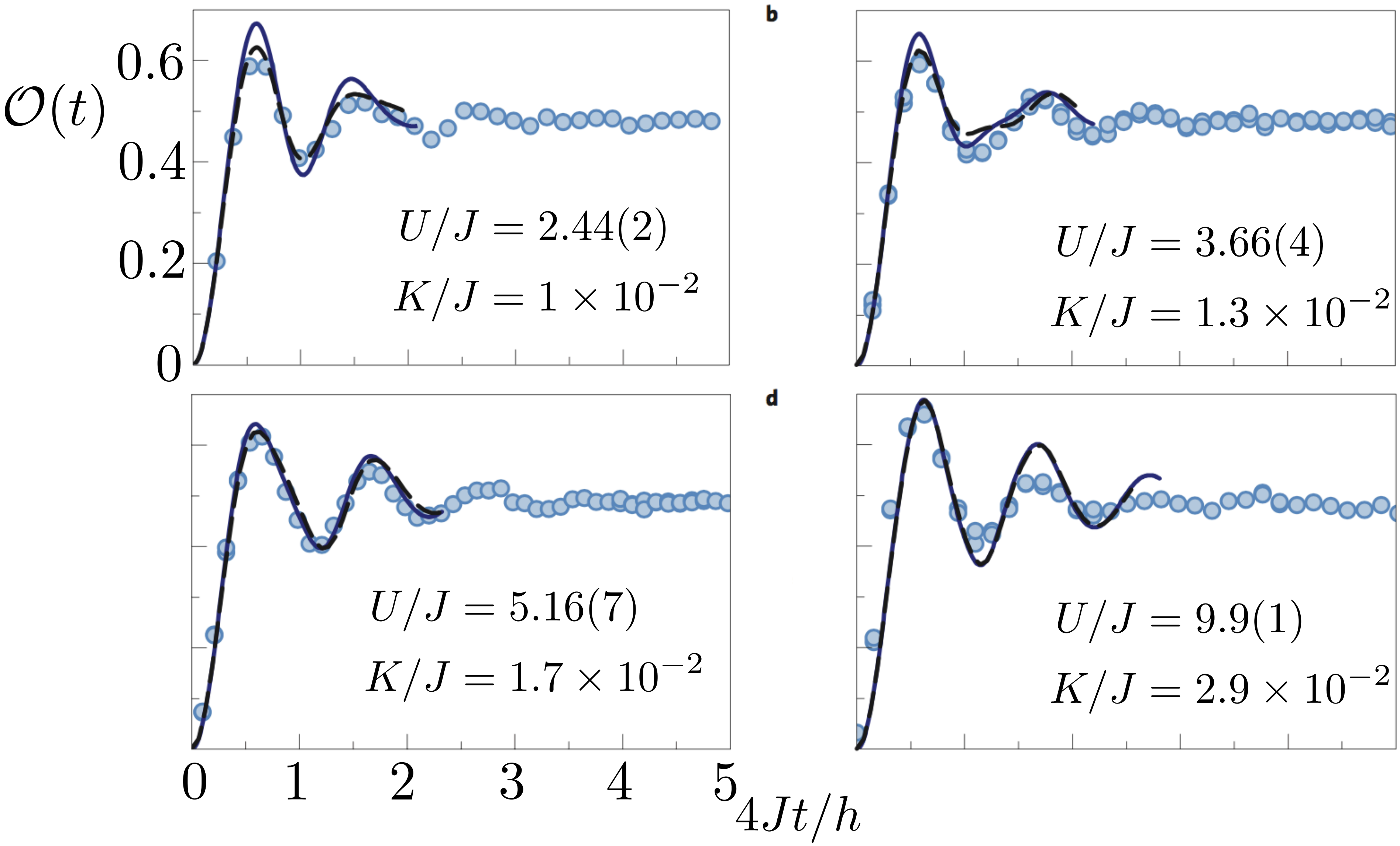
$$\mathcal{O}(t) := \langle \psi(t) | \hat{\mathcal{O}} | \psi(t) \rangle$$





$\hat{\mathcal{O}}$：奇数サイトの粒子密度

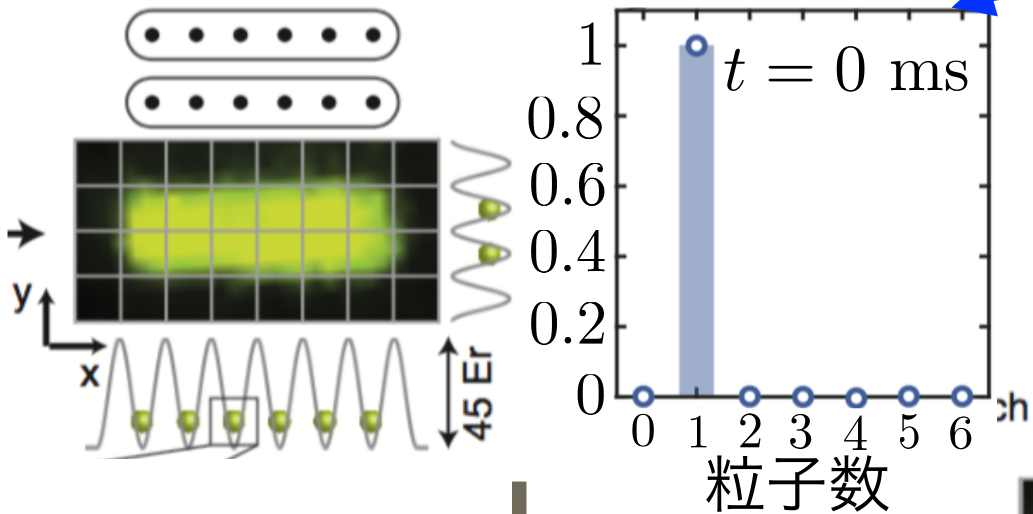
実験と数値計算(tDMRG)の比較



非可積分系の熱平衡化：小さな系

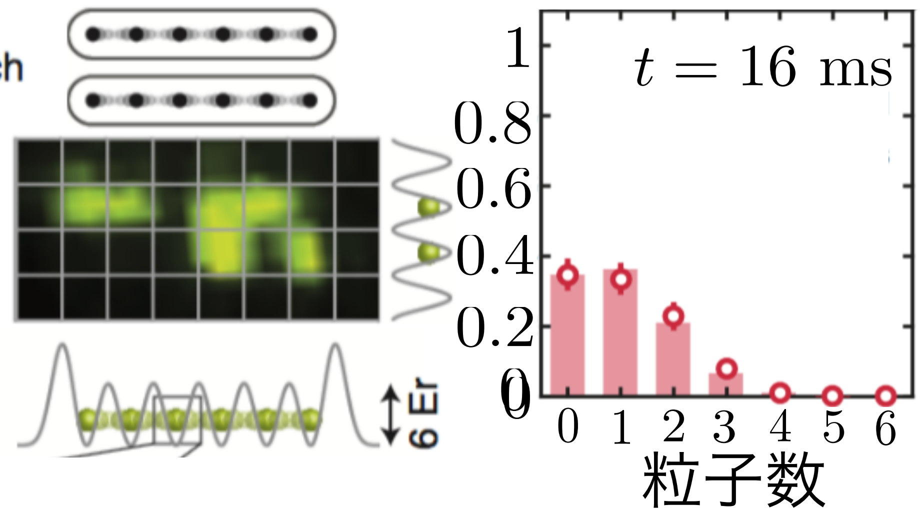
- 6サイト6粒子系の熱平衡化

A. Kaufman et al., Science (2016).



3サイト目の粒子分布
→熱平衡値へ緩和
（全系は純粋状態）

クエンチ



古典では見られない熱平衡化

非可積分系の判定法：固有値間隔

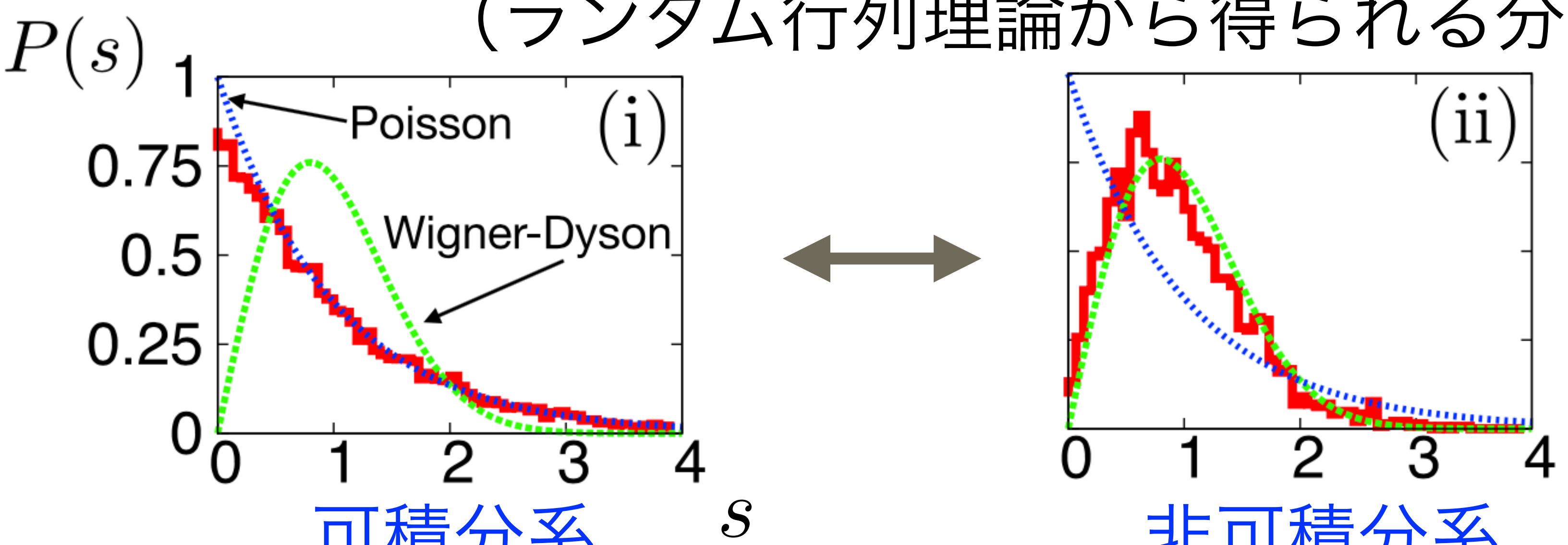
❖ 固有値間隔の分布 $P(s)$

$$s_\alpha = e_{\alpha+1} - e_\alpha \qquad e_\alpha$$：規格化されたエネルギー固有値

・可積分系…Poisson分布 $P(s) = e^{-s}$

・非可積分系…Wigner-Dyson分布 $P(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi s^2}{4}}$

（ランダム行列理論から得られる分布）



可積分系　　　　非可積分系

非可積分性と熱平衡化

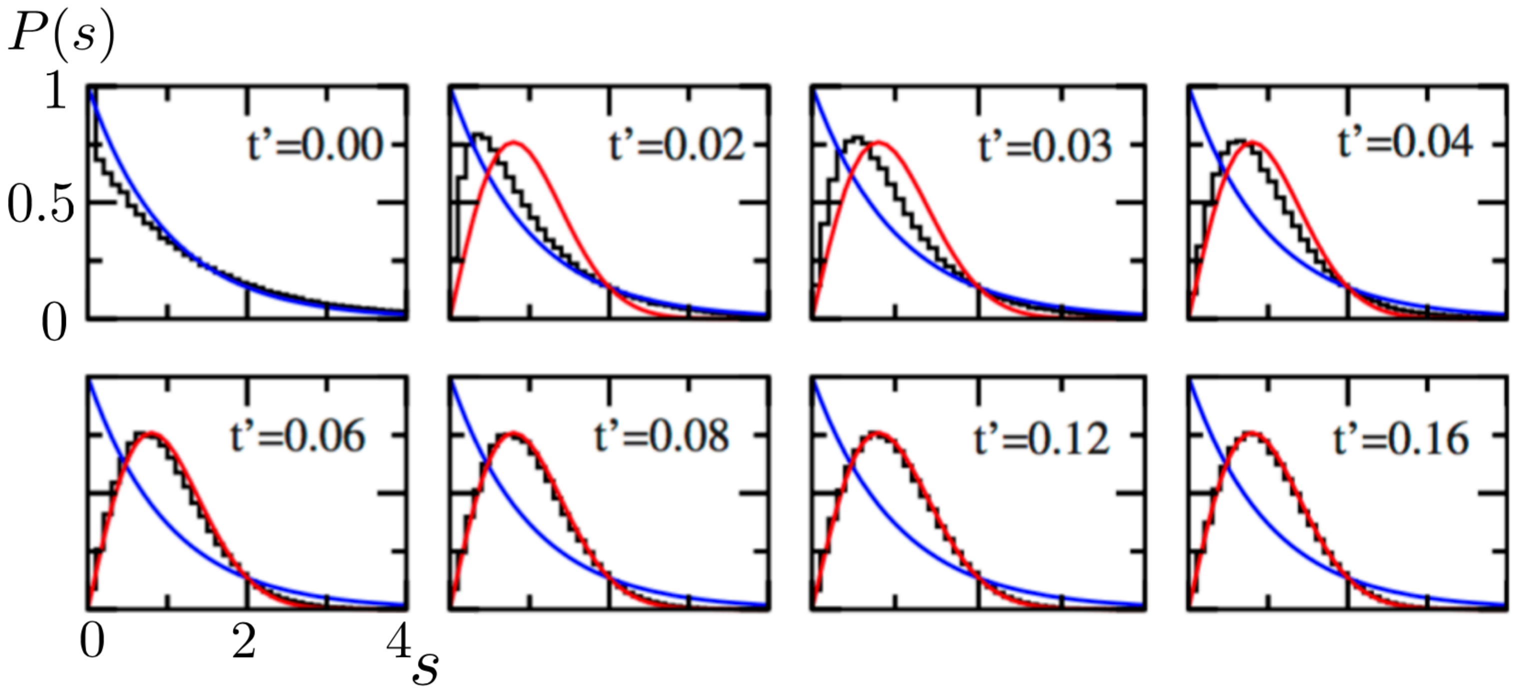
M. Rigol, Phys. Rev. Lett. 103, 100403 (2009).

- 可積分性を調整できるハードコアボゾン系

（一次元、PBC）

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{L}\left\{-t\left(\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_{i+1}+\mathrm{H.c.}\right)+V\left(\hat{n}_i-\frac{1}{2}\right)\left(\hat{n}_{i+1}-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left.-t'\left(\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_{i+2}+\mathrm{H.c.}\right)+V'\left(\hat{n}_i-\frac{1}{2}\right)\left(\hat{n}_{i+2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$t'=V'=0$：可積分系



L. F. Santos and M. Rigol, PRE (2015)

非可積分性と熱平衡化

M. Rigol, Phys. Rev. Lett. 103, 100403 (2009).

- 可積分性を調整できるハードコアボゾン系（一次元、PBC）

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{L} \left\{ -t \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + \mathrm{H.c.} \right) + V \left(\hat{n}_i - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{i+1} - \frac{1}{2} \right) - t' \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+2} + \mathrm{H.c.} \right) + V' \left(\hat{n}_i - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{i+2} - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$t' = V' = 0$：可積分系

- パラメータークエンチ：

$t' = V'$ 固定　　$t = 0.5, V = 2.0 \to t = 1.0, V = 1.0$

初期状態：クエンチ後にあるエネルギーを持つ
　　　　　クエンチ前のハミルトニアンの励起固有状態

非可積分性と熱平衡化

M. Rigol, Phys. Rev. Lett. 103, 100403 (2009).

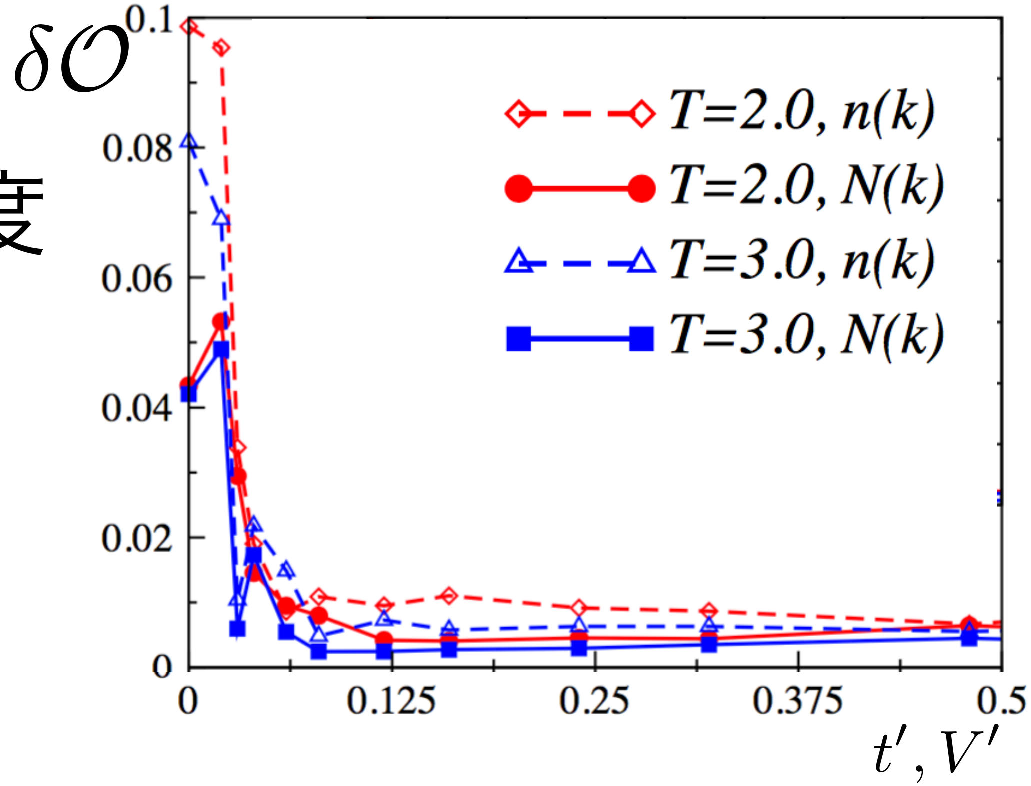
- 二種類のfew-body物理量

$$\hat{n}(k) = \frac{1}{L}\sum_{i,j} e^{-k(i-j)}\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \qquad \hat{N}(k) = \frac{1}{L}\sum_{i,j} e^{-k(i-j)}\hat{n}_i \hat{n}_j$$

- クエンチ後のミクロカノニカル分布の精度

$$\delta\mathcal{O} = \frac{\sum_k |(\mathcal{O}_k)_{\mathrm{mic}} - \overline{\mathcal{O}_k(t)}|}{\sum_k \overline{\mathcal{O}_k(t)}}$$

可積分点を離れると
差は小さくなる



非可積分性とETH

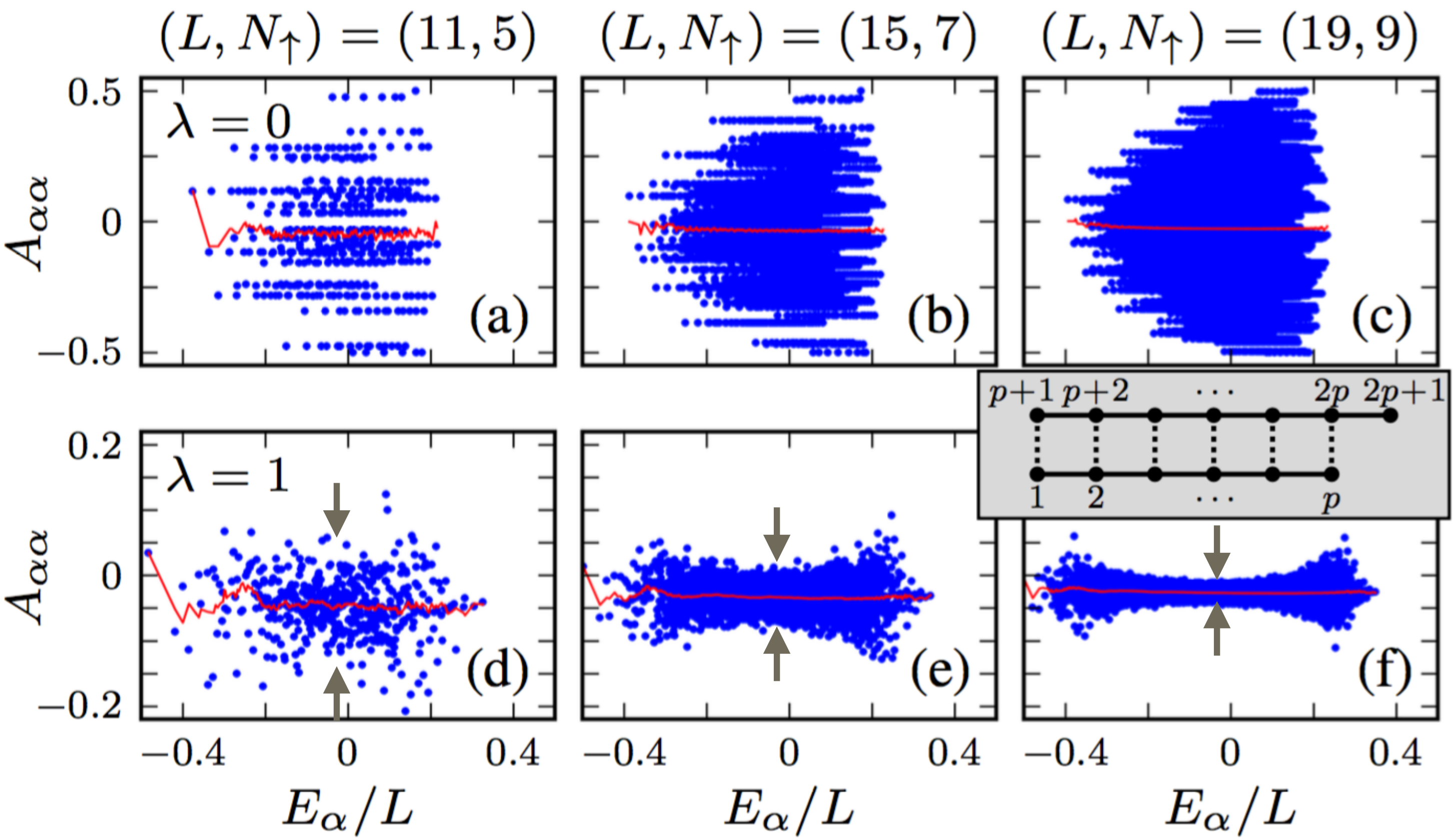
W. Beugeling et al., Phys. Rev. E 89 (2014).

- 可積分性を変化できる格子スピン系
  ETHのサイズ依存性などを検証

$\hat{A}$:あるスピンの
z成分

可積分系

非可積分系



非可積分性とETH

W. Beugeling et al., Phys. Rev. E 89 (2014).

- 非可積分的な場合の
  行列要素の対角項ごとの揺らぎ $\propto \dfrac{1}{\sqrt{D}}$

  D：ヒルベルト空間の次元（系のサイズに対し指数的）

- 非対角項についても同様 $\propto \dfrac{1}{\sqrt{D}}$ $(\propto \Delta\mathcal{O}_t)$
  W. Beugeling et al., PRE (2015)

- ETHは多くの非可積分系で数値的証拠
  （例）spinless & spinful fermions,
  interacting spin chains, Bose-Hubbard models, …

ただし、例外も構成できる RH, T. N. Ikeda, M. Ueda, PRE (2016).
N. Shiraishi and T. Mori, arXiv:1702.08227

ランダム行列との関係

- 固有値間隔分布：非可積分系↔ランダム行列
  (Wigner-Dyson分布)
- 行列要素については？
  - ・非可積分系（数値的予想）

$$E = \frac{E_\alpha + E_\beta}{2}, \omega = E_\alpha - E_\beta$$

$$\langle E_\alpha|\hat{\mathcal{O}}|E_\beta\rangle \simeq O_{\mathrm{m}}(E)\delta_{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{B(E,\omega)}{D}} R_{\alpha\beta}$$

$R_{\alpha\beta}$：ゆらぎ

  - ・ランダム行列理論（解析的）

$$\langle E_\alpha|\hat{\mathcal{O}}|E_\beta\rangle \simeq \langle\mathcal{O}\rangle\,\delta_{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{\langle\delta\mathcal{O}^2\rangle}{D}} R_{\alpha\beta}$$

$R_{\alpha\beta}$：ランダム変数

- 構造、揺らぎのサイズ依存性などが共通
  ←証明は存在していない

非可積分系で熱平衡化が見られない例

M. C. Banuls et al., Phys. Rev. Lett. 106 (2011).

- 熱力学極限では必ず熱平衡化が見られるか？
- 非可積分なIsing模型（無限系）$g = -1.05, h = 0.5$

$$\hat{H} = -\sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - g\sum_i \sigma_i^x - h\sum_i \sigma_i^z$$

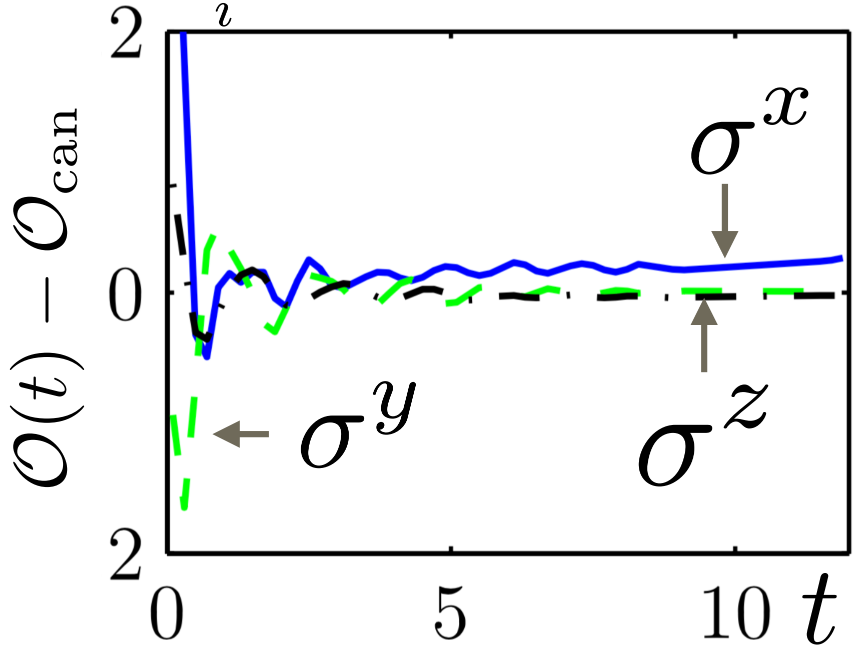
初期状態：全てのスピンが+x

物理量の量子期待値と

カノニカル分布の予言を比較

→ σ^x の熱平衡化は見られない

緩和時間に達していない可能性



Outline

1. **イントロダクション**
2. **孤立量子系の熱平衡化の基礎理論**
   - 熱平衡化の定義と目標
   - Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. **非可積分系のクエンチと熱平衡化**
   - 非可積分性とETHや熱平衡化との対応　・緩和しないケース
4. **可積分系のクエンチと非熱的な分布**
   - 一般化Gibbs分布　・局所物理量の重要性　・近年の発展
5. **その他の話題**
   - Many-body localization　・非平衡過程（相関の伝搬）

近可積分系での実験

T Kinoshita et al. Nature 440.7086 (2006): 900-903.

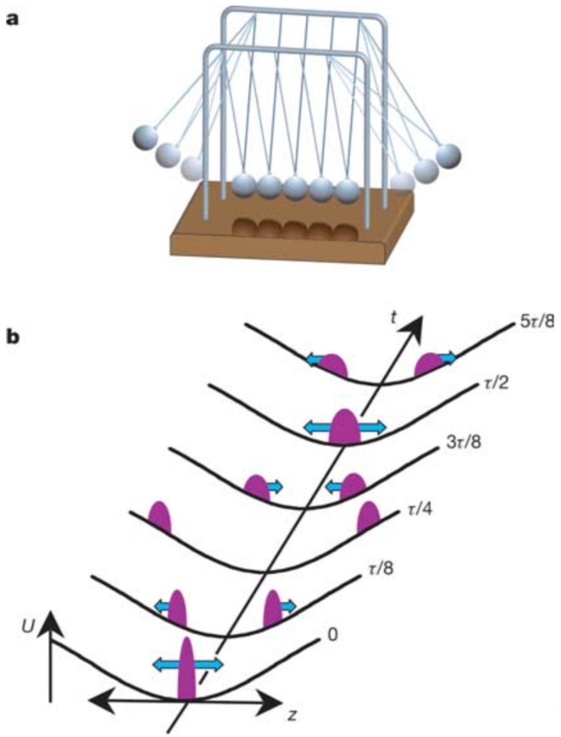
- 一次元ボーズ気体

$$\hat{H} = \hat{H}_{LL} + \hat{V}$$

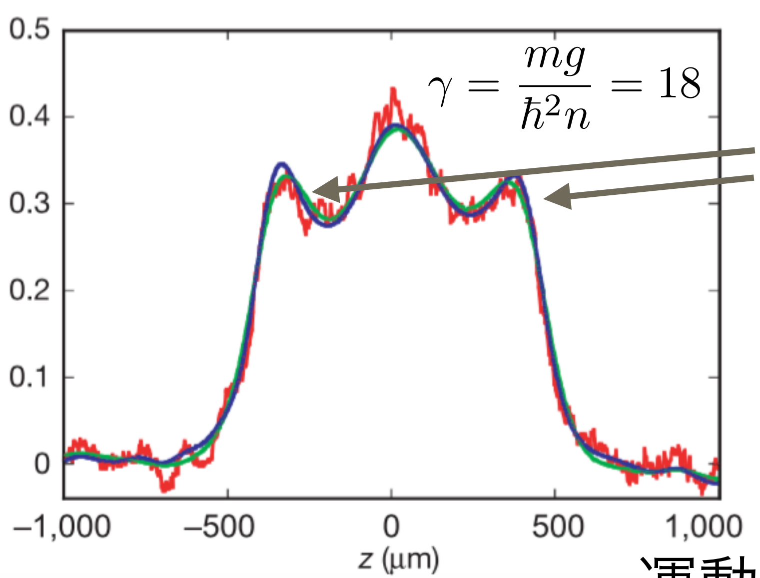
$$\hat{H}_{LL} = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i>j} g\delta(x_i - x_j)$$

：Lieb-Liniger模型（可積分）

$\hat{V}$ ：トラップポテンシャル



定常状態の運動量分布



初期状態の記憶

→非熱的分布

運動量

一般化Gibbs分布

- 可積分系
  - 多くの保存量が存在
  - カノニカル分布への緩和が起こらない
  - ETHもやぶれる

- 一般化Gibbs分布 (GGE)

M. Rigol et al., PRL (2007)

保存量

$$\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} e^{-\sum_k \underline{\lambda_k} \hat{I}_k}$$

$[\hat{H}, \hat{I}_k] = [\hat{I}_k, \hat{I}_{k'}] = 0 \; (k \neq k')$

$\langle \psi(0) | \hat{I}_k | \psi(0) \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{I}_k \hat{\rho}_{\mathrm{GGE}}]$

・適切な保存量の組 $\{\hat{I}_k\}$ を選ぶと $\overline{\mathcal{O}(t)} \simeq \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}} \hat{\rho}_{\mathrm{GGE}}]$

多くの可積分系のクエンチで確かめられている

二次形式にマップできる系

（例）1D free fermions (PBC)

$$\hat{c}_i = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{-ikx_i} \hat{c}(k)$$

$$\hat{H} = -J \sum_{j=1}^{L} c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j - \mu \sum_{j=1}^{L} c_j^\dagger c_j = -\sum_k (2J\cos(k) + \mu) \hat{c}^\dagger(k) \hat{c}(k)$$

$|\psi_0\rangle$: 並進対称性を仮定

- 長時間平均： $\hat{\rho}_{\mathrm{d}} := \overline{|\psi_0\rangle \langle\psi_0|}$
- GGE：保存量 $\hat{n}_k = \hat{c}^\dagger(k)\hat{c}(k)$ から $\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} e^{-\sum_k \lambda_k \hat{n}_k}$

$$\Rightarrow \langle \hat{n}_k \rangle_{\mathrm{d}} = \langle \psi_0 | \hat{n}_k | \psi_0 \rangle = \langle \hat{n}_k \rangle_{\mathrm{GGE}}$$

二次形式にマップできる系

（例）1D free fermions (PBC)

$\langle \hat{c}^\dagger(k)\hat{c}(p)\rangle_{\mathrm{GGE}} = \delta_{kp}\langle \hat{n}_k\rangle_{\mathrm{GGE}}$

$\langle \hat{c}^\dagger(k)\hat{c}(p)\rangle(t) = \delta_{kp}\langle \hat{n}_k\rangle_{\mathrm{GGE}}$

$\langle \hat{c}(k)\hat{c}(p)\rangle_{\mathrm{GGE}} = 0$

$\langle \hat{c}(k)\hat{c}(p)\rangle(t) = 0$

- 2点相関

場の演算子 $\hat{\psi}_i$ を $\hat{c}_i, \hat{c}_i^\dagger$ の線形結合とすると、

$$\langle \hat{\psi}_i \hat{\psi}'_j\rangle_{\mathrm{GGE/d}} = \frac{1}{L}\sum_k A_k \langle \hat{n}_k\rangle_{\mathrm{GGE/d}} + B_k$$ の形となる

$$\to \langle \hat{\psi}_i \hat{\psi}'_j\rangle_{\mathrm{d}} = \langle \hat{\psi}_i \hat{\psi}'_j\rangle_{\mathrm{GGE}}$$

$\langle \hat{n}_k\rangle_{\mathrm{d}} = \langle \hat{n}_k\rangle_{\mathrm{GGE}}$ より

- 高次の相関　$\langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2 \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4\rangle_{\mathrm{GGE/d}}$

GGEはGaussian →

$$\langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2 \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4\rangle_{\mathrm{GGE}} = \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2\rangle_{\mathrm{GGE}}\langle \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4\rangle_{\mathrm{GGE}} - \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_l^3\rangle_{\mathrm{GGE}}\langle \hat{\psi}_k^2 \hat{\psi}_m^4\rangle_{\mathrm{GGE}} + \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_m^4\rangle_{\mathrm{GGE}}\langle \hat{\psi}_k^2 \hat{\psi}_l^3\rangle_{\mathrm{GGE}}$$

Wickの定理

二次形式にマップできる系

（例）1D free fermions (PBC)

・初期状態もWickの定理が使えるならば

$$\langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2 \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4 \rangle_{\mathrm{d}} \simeq \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2 \rangle_{\mathrm{d}} \langle \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4 \rangle_{\mathrm{d}} - \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_l^3 \rangle_{\mathrm{d}} \langle \hat{\psi}_k^2 \hat{\psi}_m^4 \rangle_{\mathrm{d}} + \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_m^4 \rangle_{\mathrm{d}} \langle \hat{\psi}_k^2 \hat{\psi}_l^3 \rangle_{\mathrm{d}}$$

より $\langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2 \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4 \rangle_{\mathrm{d}} = \langle \hat{\psi}_i^1 \hat{\psi}_j^2 \hat{\psi}_l^3 \hat{\psi}_m^4 \rangle_{\mathrm{GGE}}$

高次の相関でもGGEは正しい！

・一般の初期状態に対してはGGEは正しくない

・クラスター性を持つ初期状態に対して一般化がなされている
（上式が大きな系で漸近的に成り立ち、GGEが正当化される）

S. Sotiriadis and P. Calabrese, J. Stat. Mech. (2014)

GGEを構成する保存量

（例）1D free fermions (PBC)

保存量 $\hat{n}_k = \hat{c}^\dagger(k)\hat{c}(k)$ ➡ $\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} e^{-\sum_k \lambda_k \hat{n}_k}$

線形結合

示量的な保存量

$(n+1)$ 個の隣接サイトに台を持つ物理量の和

$$\hat{I}_{n,+} = 2J\sum_k \cos(x_n k)\hat{c}^\dagger(k)\hat{c}(k) = J\sum_i (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+n} + \mathrm{h.c.}),$$

$$\hat{I}_{n,-} = 2J\sum_k \sin(x_n k)\hat{c}^\dagger(k)\hat{c}(k) = iJ\sum_i (\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+n} - \mathrm{h.c.})$$

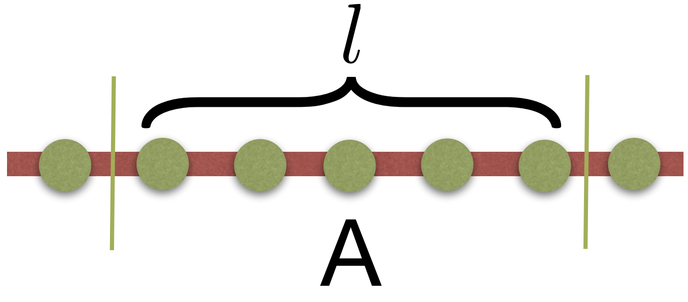
➡ $$\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{e^{-\sum_n (\mu_{n,+}\hat{I}_{n,+} + \mu_{n,-}\hat{I}_{n,-})}}{Z_{\mathrm{GGE}}}$$

等価

どのような保存量が重要な役割を持つか？

M. Fagotti and F. H. L. Essler, Phys. Rev. B, 87, 245107 (2013)

- 局所領域A内の物理量$\hat{\mathcal{O}}$



全てに対し$\mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}}] = \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{eff}}]$

$$\Leftrightarrow \quad (\hat{\rho}_{\mathrm{d}})_A = (\hat{\rho}_{\mathrm{eff}})_A \qquad\qquad (\hat{\rho})_A := \mathrm{Tr}_{\bar{A}}[\hat{\rho}]$$

$\hat{\rho}_{\mathrm{eff}}$ を少ない個数の保存量を用いたGGEの形で探す

・横磁場イジング模型 $\hat{H} = -J\sum_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h\sigma_i^z]$

示量的保存量を構成できる：$I_n^{\pm}$ $n+2$ 個の隣接スピンの和

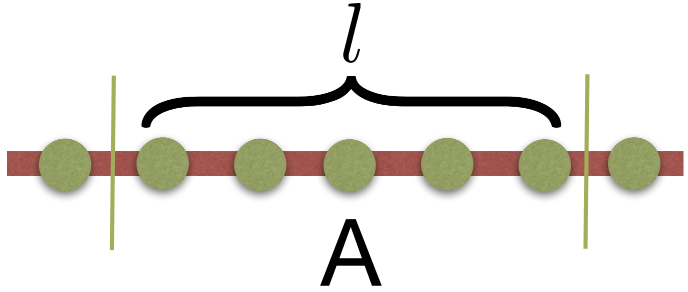
GGE: $$\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm} \lambda_n^\sigma I_n^\sigma\right]$$

$(\hat{\rho}_{\mathrm{d}})_A \simeq (\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}})_A$ が（横磁場クエンチでは）成立

局所保存量の重要性

M. Fagotti and F. H. L. Essler, Phys. Rev. B, 87, 245107 (2013)

$$\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} \lambda_n^{\sigma} I_n^{\sigma} \right]$$



$$\mathcal{D}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) := \frac{||\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2||_F}{\sqrt{||\hat{\rho}_1||_F^2 + ||\hat{\rho}_2||_F^2}}$$

保存量の数を減らせるか？

“Truncated GGE” を定義

$$\hat{\rho}_{\mathrm{tGGE}}^{(y)} = \frac{1}{Z_{\mathrm{tGGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{y-1} \sum_{\sigma=\pm} \lambda_{n,y}^{\sigma} I_n^{\sigma} \right]$$

y よりも非局所な保存量を無視

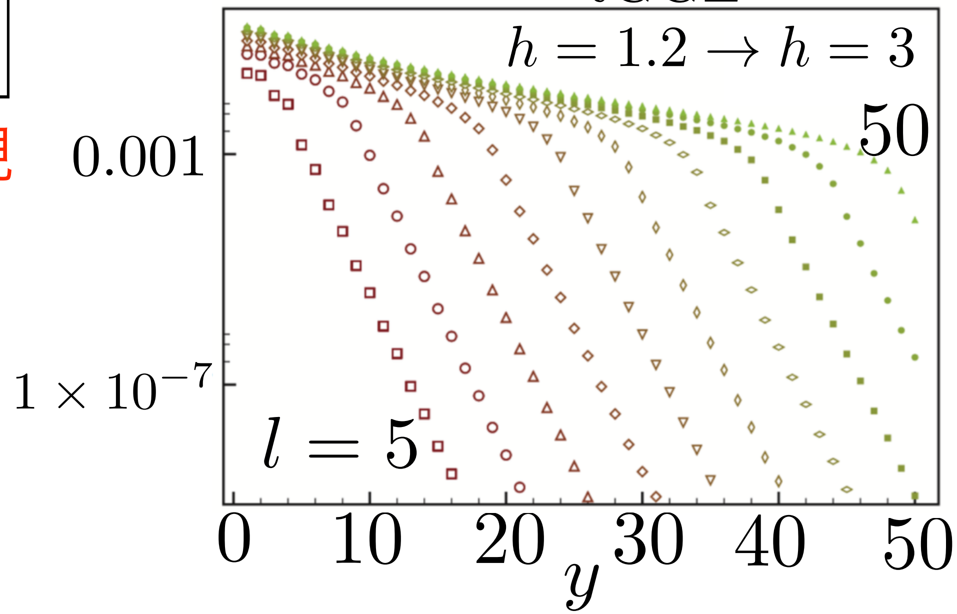
すると$l \lesssim y$に対しては

$$(\hat{\rho}_{\mathrm{d}})_A \simeq (\hat{\rho}_{\mathrm{tGGE}}^{(y)})_A$$

局所領域の定常状態には

局所的な保存量が重要

$(\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}})_A$ と $(\hat{\rho}_{\mathrm{tGGE}}^{(y)})_A$の差



Bethe ansatzで解ける系

❖ XXZ模型、Lieb-Liniger模型など

XXZ模型 ($\Delta > 1$) について $\hat{H} = \frac{J}{4}\sum_{i=1}^{N}[\hat{\sigma}_i^x\hat{\sigma}_{i+1}^x + \hat{\sigma}_i^y\hat{\sigma}_{i+1}^y + \Delta(\hat{\sigma}_i^z\hat{\sigma}_{i+1}^z - 1)]$

・ベーテ仮説を用いて局所保存量を構成できる

$$\hat{I}_n = \sum_j \hat{\mathcal{I}}_{j,j+1,\cdots,j+n}$$

・局所保存量を用いたGGEは定常状態を記述しない

B. Wouters et al., PRL (2014); B. Pozsgay et al., PRL (2014)

・ベーテ仮説を用いて準局所保存量の組もみつかる

$$\hat{J}_n = \sum_j \sum_r f_{n,r}\hat{\mathcal{J}}_{j,j+1,\cdots,j+r}$$

$f_{n,r} \to 0\ (r \to \infty)$
示量的になる

・準局所保存量まで含めるとGGEが正しい

E. Ilievski et al., PRL (2015)

GGEの出現と保存量の個数の関係は？

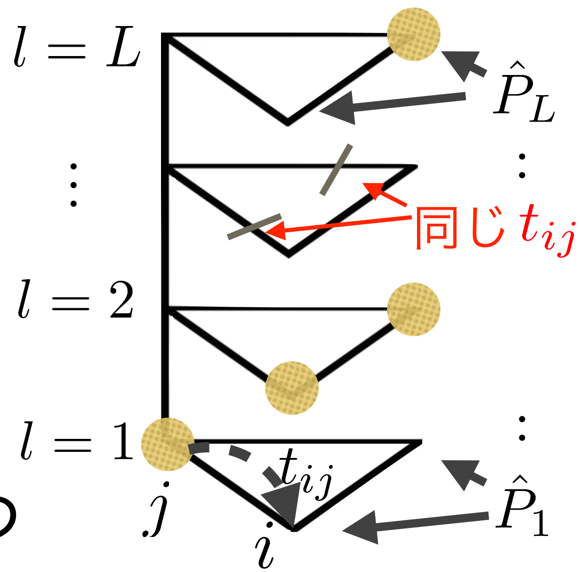
R. Hamazaki et al., Phys. Rev. E 93, 032116 (2016).

- 非可積分系（エネルギーのみが保存）→ カノニカル
- 可積分系（保存量が固有状態を決定）→ GGE

保存量の個数はどれほど必要か？

- ハミルトニアンと交換する対称性を持つハードコアボゾンの非可積分系

$$\hat{H} = -\sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij}(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \mathrm{h.c.})$$



t_{ij} : ランダムだが層ごとに対称性を保つ

→ 示量的な数の局所的$\mathbb{Z}_2$対称性

保存量　$\hat{P}_l \ (1 \leq l \leq L)$　← $\hat{H}, \hat{P}_1, \cdots, \hat{P}_L$からGGEを構成

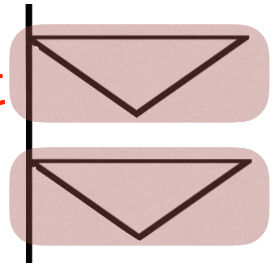
GGEへの緩和

R. Hamazaki et al., Phys. Rev. E 93, 032116 (2016).

マクロな物理量

層ごとに定義された
オペレーターの和

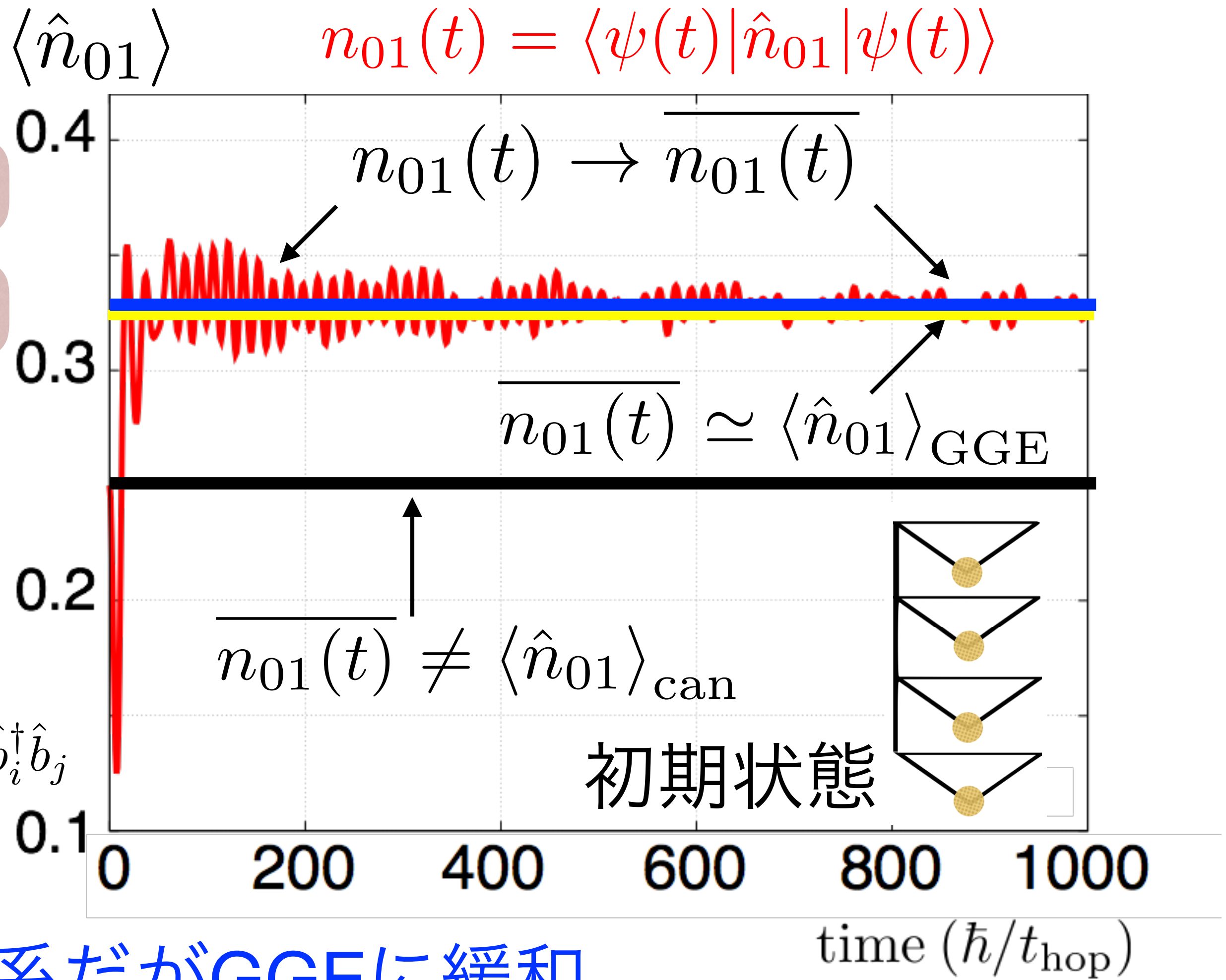
$\hat{n}_{01}$



異なる二次元的な運動量の占有数

$$\hat{n}_{k_x,k_y} := \hat{n}(k_x\pi, k_y\pi)$$

$$\hat{n}(k_x,k_y) = \frac{1}{2^2 L} \sum_{i,j:\,\text{同じ層}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

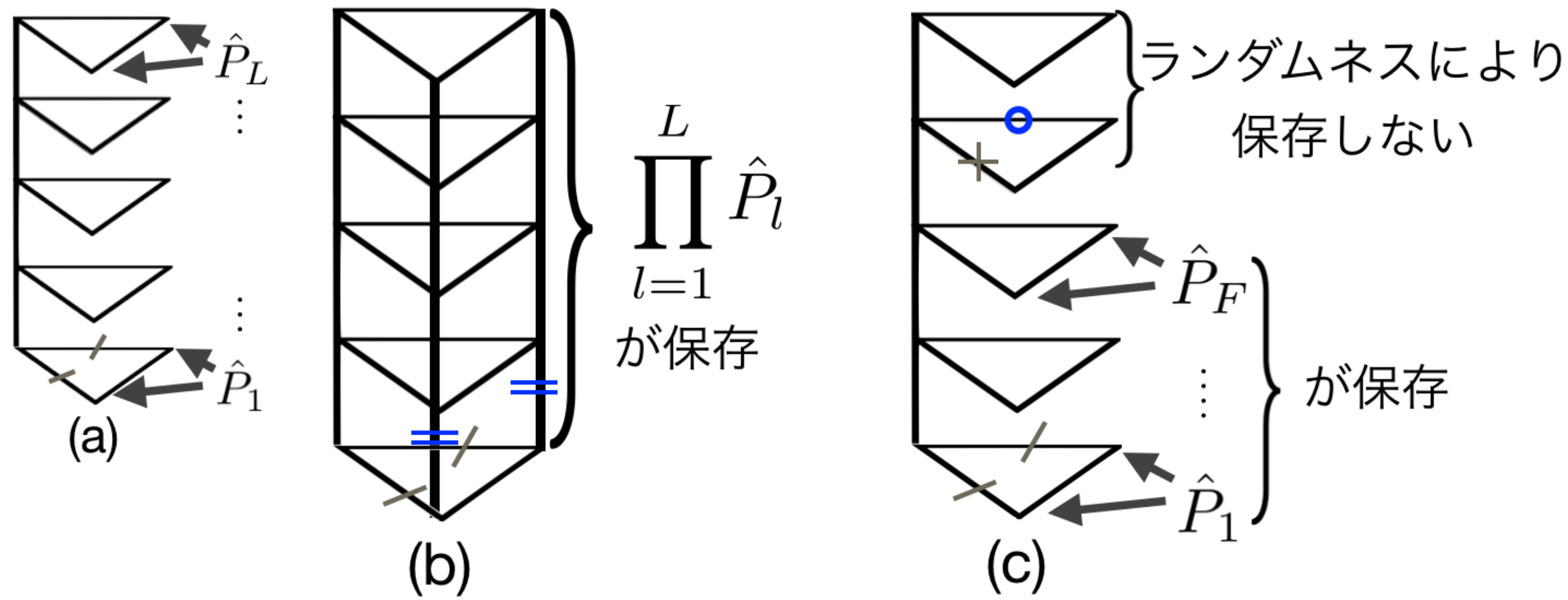


非可積分系だがGGEに緩和

対称性セクターごとに見て初めてETHが成立

他のモデルによる比較

R. Hamazaki et al., Phys. Rev. E 93, 032116 (2016).



大域的な$\mathbb{Z}_2$対称性

Lに依存しない

F個の局所的な$\mathbb{Z}_2$対称性

(b),(c)はカノニカル分布へ緩和する

←示量的な数の対称性がGGEの出現に重要

Outline

1. イントロダクション
2. 孤立量子系の熱平衡化の基礎理論
   - 熱平衡化の定義と目標
   - Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)
3. 非可積分系のクエンチと熱平衡化
   - 非可積分性とETHや熱平衡化との対応
   - 緩和しないケース
4. 可積分系のクエンチと非熱的な分布
   - 一般化Gibbs分布
   - 局所物理量の重要性
   - 近年の発展
5. その他の話題
   - Many-body localization
   - 非平衡過程（相関の伝搬）

Many-body localization (MBL)

❖ 相互作用を持つ系にdisorderを加える

（例） $$H = \sum_{i=1}^{L} [h_i \hat{S}_i^z + J \hat{\vec{S}}_i \cdot \hat{\vec{S}}_{i+1}] \qquad h_i \in [-h, h]$$

$J = 1$ では $h \simeq 3.5$ で局在相への転移が起こる

局在相では

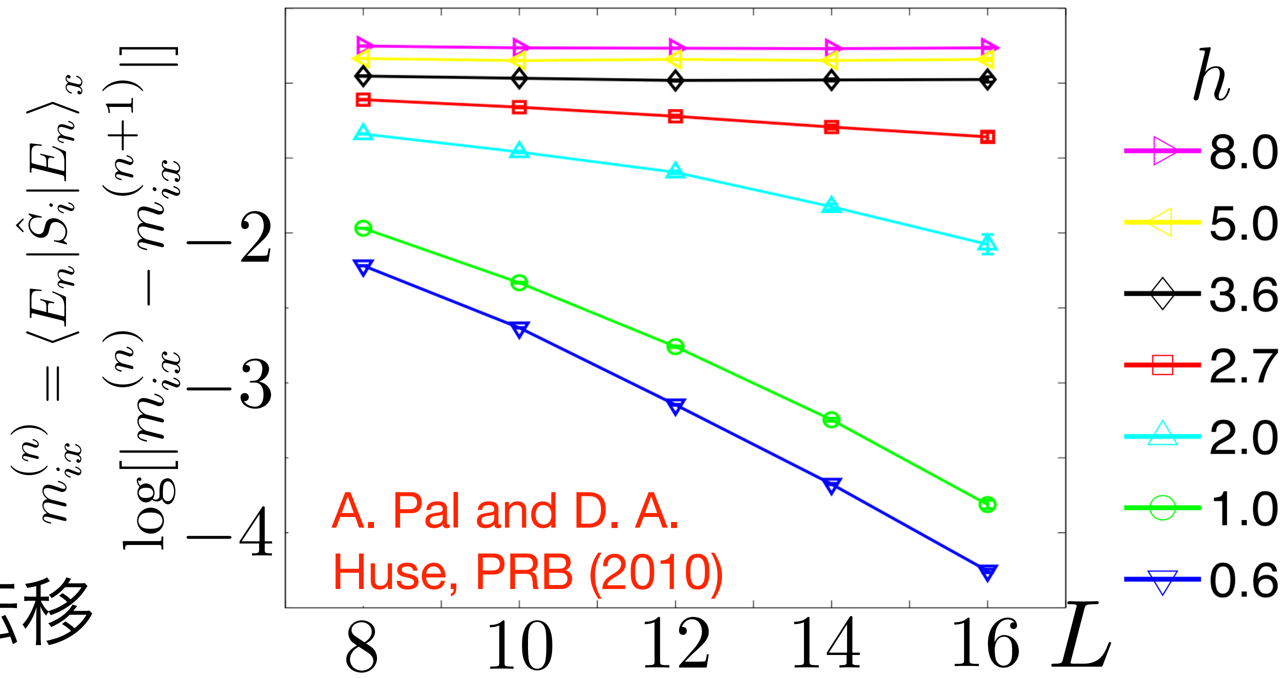
・ETHが破れる

・熱平衡化しない

・固有値間隔は

Poisson分布 etc…

励起状態の量子相転移



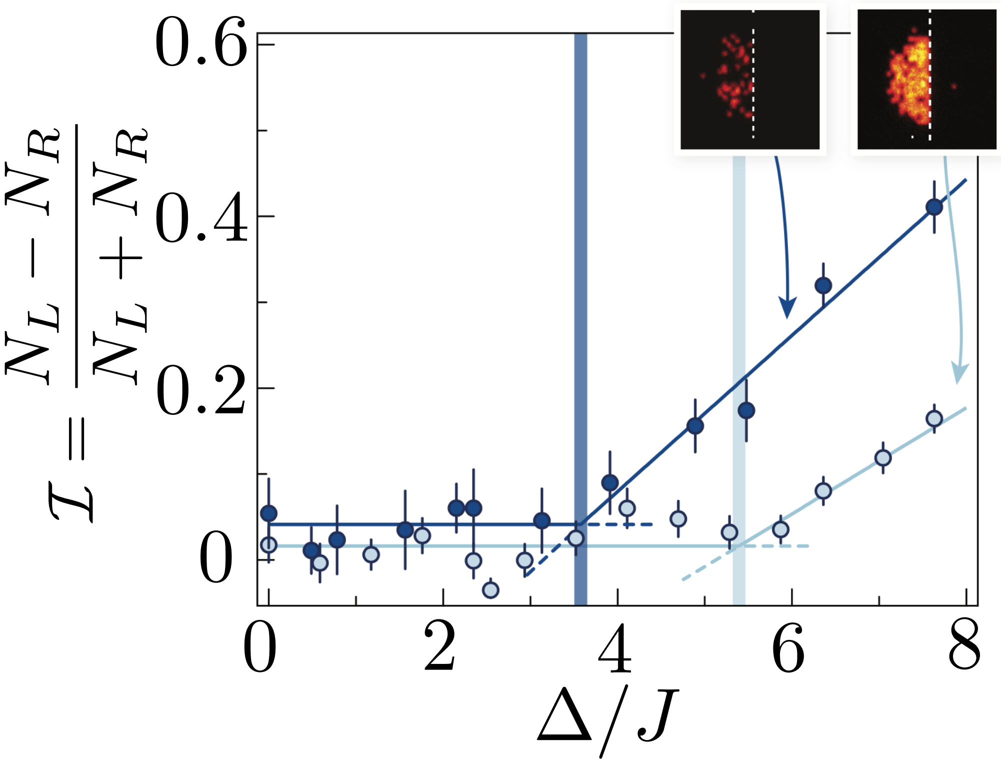
Many-body localizationの実験

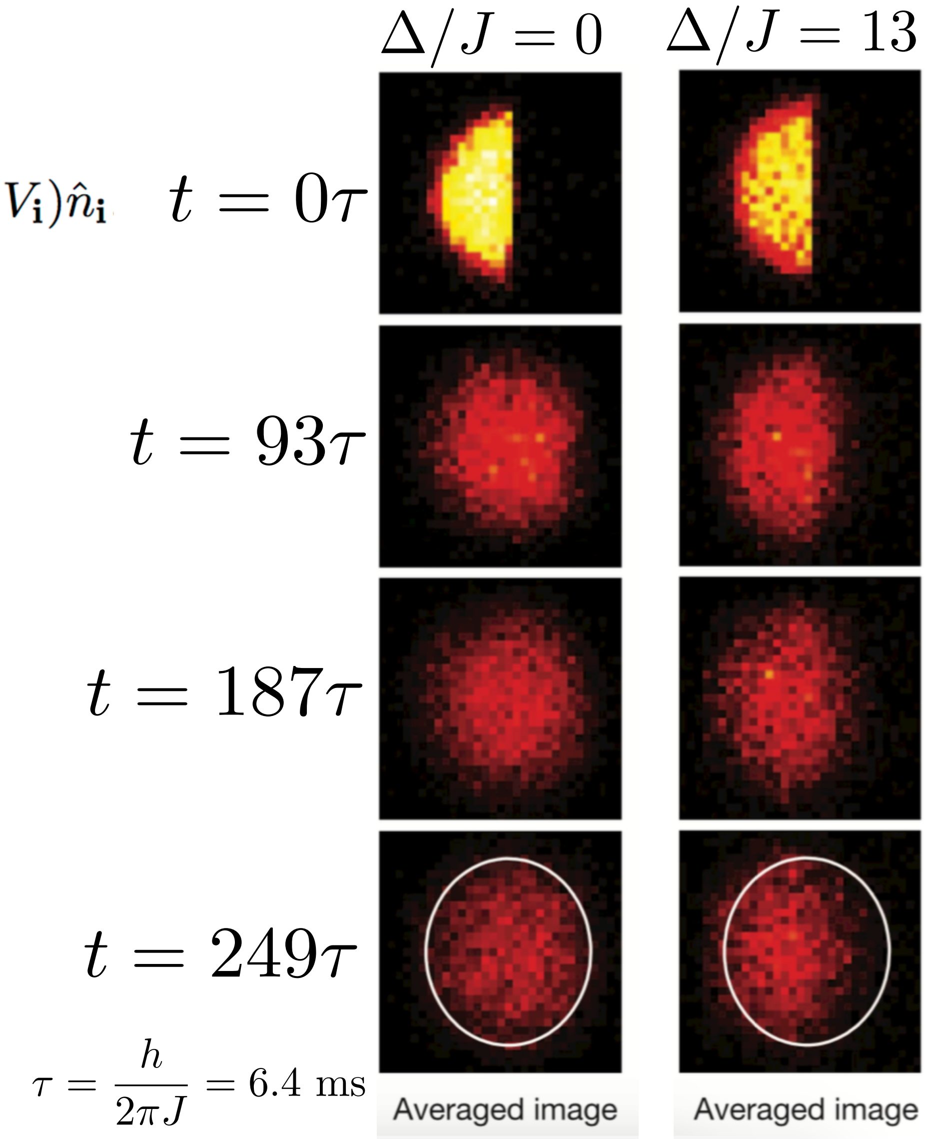
J. Choi et al., Science 352.6293 (2016)

二次元Bose-Hubbard模型

$$\hat{H} = -J\sum_{\langle \mathbf{i},\mathbf{j}\rangle} \hat{a}_{\mathbf{i}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{j}} + \frac{U}{2}\sum_{\mathbf{i}} \hat{n}_{\mathbf{i}}(\hat{n}_{\mathbf{i}}-1) + \sum_{\mathbf{i}}(\delta_{\mathbf{i}}+V_{\mathbf{i}})\hat{n}_{\mathbf{i}}$$

MBL転移を観測





Phenomenology of MBL

1-D ハイゼンベルグ模型 $\hat{H} = \sum_i h_i \sigma_i^z + \sum_{ij} J \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$

$J = 0$ の時、固有状態はサイトごとの σ_i^z の固有値によって決定される：$|\sigma_1^z \ldots \sigma_L^z\rangle$

各スピンは保存

$J \neq 0$ だが強い乱れがある時、「ドレスト」スピンが局在すると期待される :$\sigma_i^z \to \tau_i^z$

i の周りに局在

ハミルトニアンは現象論的に次の様に書けると期待：

$$\hat{H}_{\text{eff}} = E_0 + \sum_i h_i' \hat{\tau}_i^z + \sum_{ij} J_{ij}' \hat{\tau}_i^z \hat{\tau}_j^z + \sum_{n=3} \sum_{i_1 \cdots i_n} K_{i_1 \cdots i_n}^{(n)} \hat{\tau}_{i_1}^z \cdots \hat{\tau}_{i_n}^z$$

→ 固有状態は$|\tau_1^z \ldots \tau_L^z\rangle$によって決定

Lieb-Robinson限界

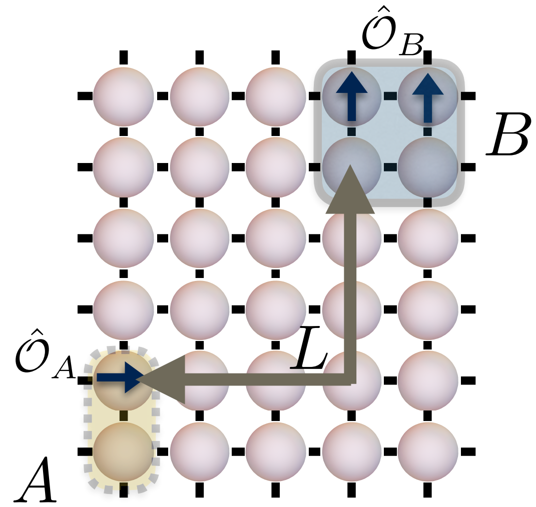
E. H. Lieb and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 28, 251 (1972)

- 定常状態に達するまでの過程、時間スケール
  →系の特徴に依存

- Lieb-Robinson (LR) 限界

  局所相互作用する格子系での厳密な結果

  領域A、B上の物理量$\hat{\mathcal{O}}_A, \hat{\mathcal{O}}_B$について



$$||[\hat{\mathcal{O}}_A(t), \hat{\mathcal{O}}_B]||_{\mathrm{op}} \leq c \min\{|A|, |B|\}\, ||\hat{\mathcal{O}}_A||_{\mathrm{op}} ||\hat{\mathcal{O}}_B||_{\mathrm{op}} \exp\left[-\frac{L - vt}{\xi}\right]$$

c, v, ξ：定数　　　$L = d(A, B)$：AとBの距離

$t \sim L/v$まではAの情報がBに伝わらない

情報の伝播の速度にはvという上限がある

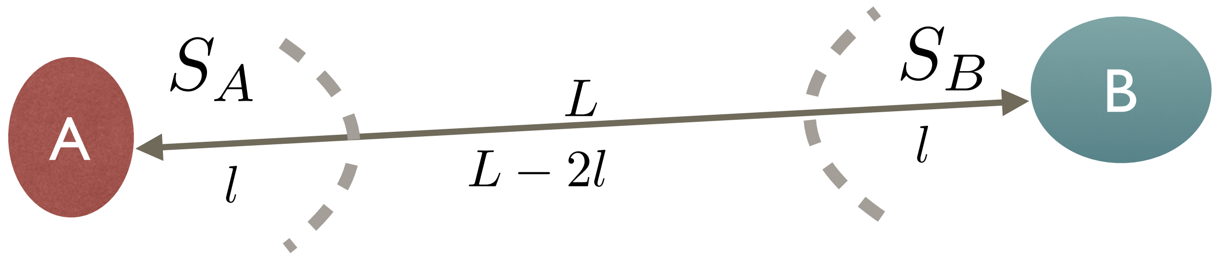
LR限界の応用例：相関の伝搬

初期状態 $|\psi\rangle$ が相関長 χ をもって指数減衰すると仮定

$$|\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_X\hat{\mathcal{O}}_Y|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_X|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_Y|\psi\rangle| \le C\exp\left[-\frac{d(X,Y)}{\chi}\right]$$

この時 $|\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_A(t)\hat{\mathcal{O}}_B(t)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_A(t)|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_B(t)|\psi\rangle| \le C'\exp\left[-\frac{L-2vt}{\chi'}\right]$

$t\sim L/2v$ までは相関が作られない！



S. Bravyi et al., PRL (2006)

LR限界

$$\hat{\mathcal{O}}^l_A(t) = (\hat{\mathcal{O}}_A(t))_{S_A}$$

$$||\hat{\mathcal{O}}_A(t) - \hat{\mathcal{O}}^l_A(t)|| \le c\exp\left[-\frac{l-vt}{\xi}\right]$$

初期状態

$$|\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}^l_A(t)\hat{\mathcal{O}}^l_B(t)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{\mathcal{O}}^l_A(t)|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}^l_B(t)|\psi\rangle|$$

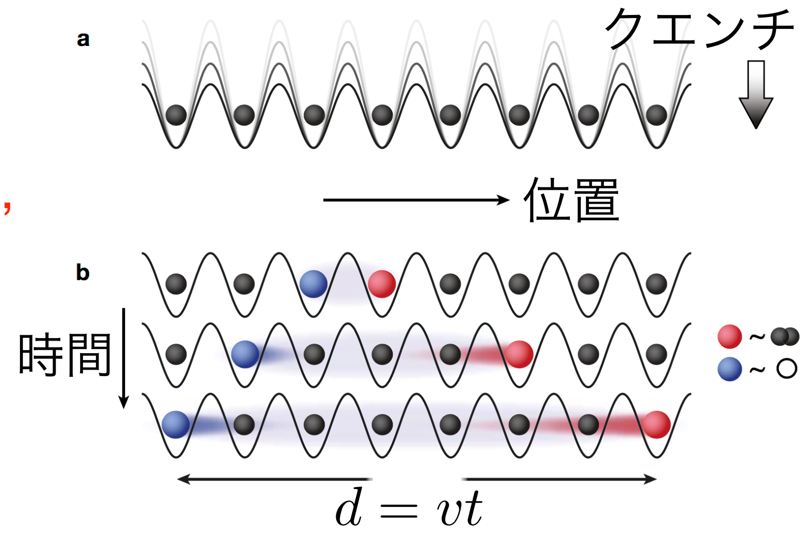
$$\le C\exp\left[-\frac{L-2l}{\chi}\right]$$

LR限界と相関の伝搬

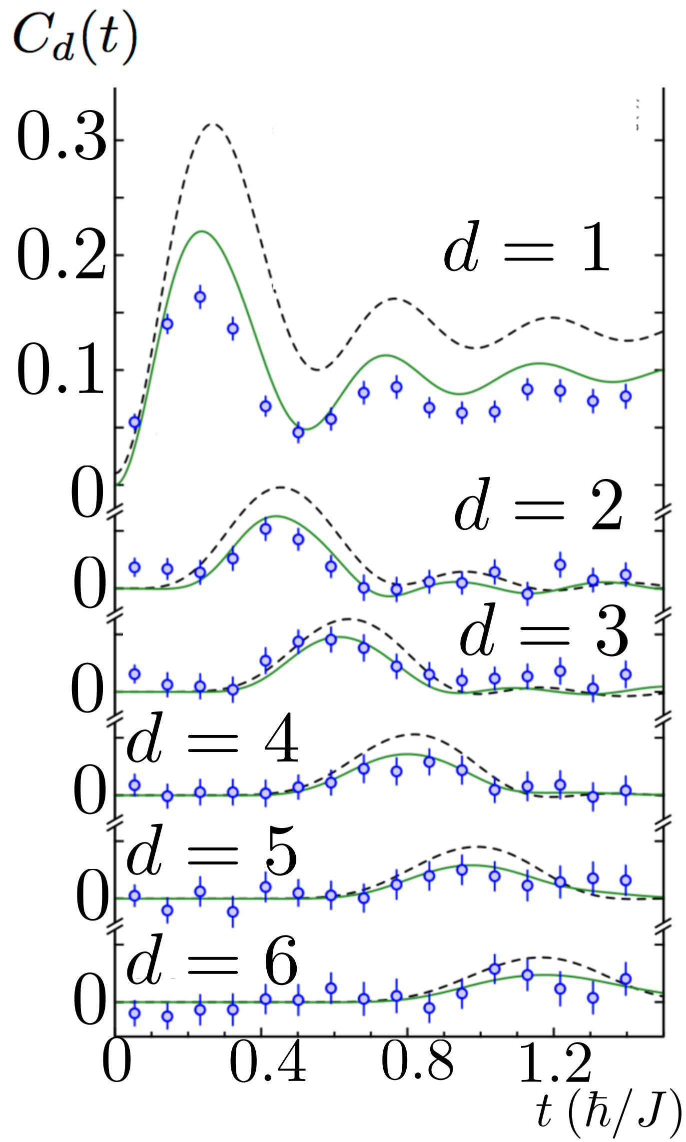
- 実験：Bose-Hubbard模型

$$C_d(t) = \langle \hat{s}_j(t)\hat{s}_{j+d}(t)\rangle - \langle \hat{s}_j(t)\rangle \langle \hat{s}_{j+d}(t)\rangle$$

$\hat{s}_j$ ：粒子数のパリティ



M. Cheneau et al., Nature (2012)



準粒子による一定速度な情報の伝播

LR限界とOTOC

- 有限温度の非可積分系では準粒子が不安定

  →通常の相関はすぐに減衰してしまう

- Out-of-time ordered correlator (OTOC)

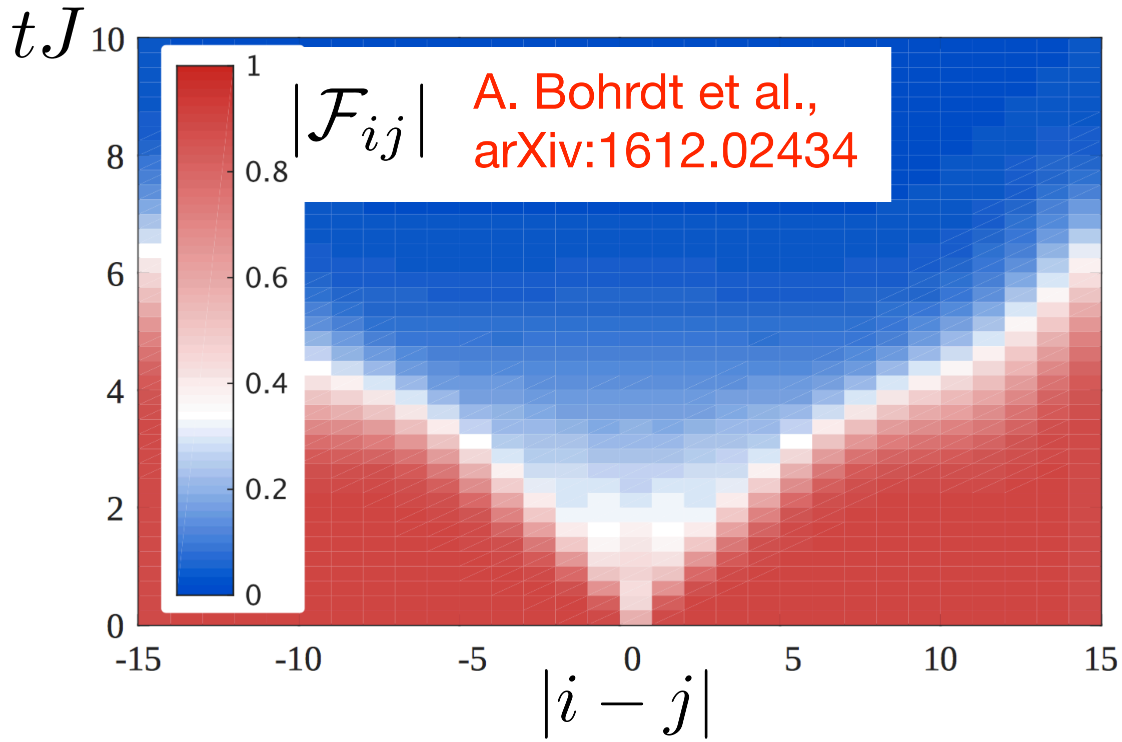
$$\mathcal{F}_{ij} = \langle \hat{a}_j^\dagger(t)\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j(t)\hat{a}_i \rangle$$

$$\leftarrow \langle |[\hat{a}_j(t), \hat{a}_i]|^2 \rangle$$ を展開

$$\langle \cdots \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{can}} \cdots]$$

準粒子描像でない

一定速度の情報の伝播



まとめ

- 実験技術の発展によって、孤立量子系の熱平衡化の問題が再び注目を集めている

- ETHを始めとして、熱平衡化するための条件が理解されてきている

- 多くの非可積分系がETHにより熱平衡化すると期待される一方、可積分系はGGEに緩和すると期待されている

- 緩和の時間スケールなど、未解決な問題は残る

補足

純粋状態による熱平衡状態の記述と典型性

- 状態はミクロカノニカル分布と一般に異なる

$$\hat{\rho} \neq \hat{\rho}_{\mathrm{mic}}$$

- 物理量を限定　$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{\mathcal{O}}] \simeq \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}}\hat{\mathcal{O}}]$

- 典型的な純粋状態は熱平衡状態

エネルギーシェル内のほぼ全ての状態 $|\psi\rangle$ に対し

$$\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle \simeq \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{mic}}\hat{\mathcal{O}}]$$

$\hat{\mathcal{O}}$: few-bodyの物理量

Von Neumannの仕事と誤解

- Von Neumannの仕事
  - 熱平衡状態の特徴づけ
    ←（粗視化した）マクロ物理量に基づく相空間
  - 全ての初期状態が熱平衡状態へ緩和する十分条件
    ← マクロ空間に対するETH
  - ETHの正当化の試み
    ←典型性の議論：ほとんどのマクロ空間の分割で成立
- 誤解　P. Bocchieri and A. Loinger, Physical Review 111, 668 (1958)　など
  実際より弱い主張と誤解、意味をなさないと批判
  「各々の初期状態に対して、ほとんどのマクロ空間の分割で熱平衡化」

ETHによる熱平衡化の正当化

長時間平均

$$\begin{aligned}\sum_\alpha |c_\alpha|^2 \mathcal{O}_{\alpha\alpha} &\simeq \sum_\alpha |c_\alpha|^2 \mathcal{O}_{\mathrm{m}}(E_\alpha/V) \\ &= \sum_\alpha |c_\alpha|^2 \left[\mathcal{O}_{\mathrm{m}}(E/V) + \frac{E_\alpha - E}{V}\mathcal{O}'_{\mathrm{m}} + \frac{1}{2}\left(\frac{E_\alpha - E}{V}\right)^2 \mathcal{O}''_{\mathrm{m}} + \cdots\right] \\ &\simeq \mathcal{O}_{\mathrm{m}}(E/V) + \frac{\delta E^2}{2V^2}\mathcal{O}''_{\mathrm{m}} \\ &\simeq \mathcal{O}_{\mathrm{m}}(E/V)\end{aligned}$$

ミクロカノニカル分布

$$\begin{aligned}\frac{1}{d}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathcal{O}_{\alpha\alpha} &\simeq \mathcal{O}_{\mathrm{m}}(E/V) + \frac{\Delta E^2}{2V^2}\mathcal{O}''_{\mathrm{m}} \\ &\simeq \mathcal{O}_{\mathrm{m}}(E/V)\end{aligned}$$

初期状態の役割

・時間揺らぎについて
右のことが示せる

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{O}_t^2 &= \sum_{\alpha\neq\beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2 \\
&\leq \sum_{\alpha\beta} |c_\alpha|^2 |c_\beta|^2 |\mathcal{O}_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{d}}\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}}\hat{\mathcal{O}}] \\
&= \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{d}}\hat{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}})^\dagger] \\
&\leq \sqrt{\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{d}}\hat{\mathcal{O}}(\hat{\rho}_{\mathrm{d}}\hat{\mathcal{O}})^\dagger]\mathrm{Tr}[(\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}})^\dagger\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}}]} \\
&= \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{d}}^2\hat{\mathcal{O}}^2] \\
&\leq ||\hat{\mathcal{O}}^2||_{\mathrm{op}}\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{d}}^2] \\
&\leq ||\hat{\mathcal{O}}||_{\mathrm{op}}^2\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{d}}^2] \\
&= \frac{||\hat{\mathcal{O}}||_{\mathrm{op}}^2}{d_{\mathrm{eff}}},
\end{aligned}
$$

・ミクロカノニカル分布への
緩和の条件は

$$d_{\mathrm{eff}} > e^{-\eta N} d \ \ (0 < \eta < \gamma)$$

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathcal{O}_{\alpha\alpha} - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle_{\mathrm{mic}}\right| > \delta\right] \leq e^{-N\gamma}$$

熱平衡化についての注意

- 熱平衡化がなぜ見られなかったか？

 →緩和時間に達していない可能性

 ・マクロな系では緩和時間は遅い物理量

 （流体モード）に依存すると期待される

 ・量子多体系ではさらに遅い物理量の可能性も

 ・一般に、緩和の時間スケールは系に依存する

H. Kim et al.,
PRE (2015).

- マクロな量子多体系の長時間ダイナミクスは未解決問題

熱平衡化についての注意

- 熱平衡がなぜ見られなかったか？

  →緩和時間に達していない

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{O}}(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_{\mathrm{op}} &= ||e^{i\hat{H}t}[\hat{\mathcal{O}},\hat{H}]e^{-i\hat{H}t}||_{\mathrm{op}} \\
&= ||[\hat{\mathcal{O}},\hat{H}]||_{\mathrm{op}} \\
&\leq \chi, \\
||\hat{\mathcal{O}}(t)-\hat{\mathcal{O}}(0)||_{\mathrm{op}} &= \left\|\int_0^t d\tau \frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{O}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right\|_{\mathrm{op}} \\
&\leq \int_0^t d\tau \left\|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{O}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right\|_{\mathrm{op}} \\
&\leq \chi t,
\end{aligned}
$$

局所保存量の重要性

横磁場イジング模型　$\hat{H} = -J\sum_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h\sigma_i^z]$

局所保存量を構成できる：I_n

$n+2$ 個の隣接スピン

$$I_n^+ = -J(U_{n+1} + U_{1-n}) + hJ(U_n + U_{-n}),$$

$$I_n^- = J(V_{n+1} + V_{-n-1})\,, \quad n \geqslant 0.$$

$$U_{n>0} = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^x \left(\prod_{l=1}^{n-1} \sigma_{j+l}^z\right) \sigma_{j+n}^x,$$

$$U_0 = -\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^z,$$

$$U_{n<0} = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^y \left(\prod_{l=1}^{|n|-1} \sigma_{j+l}^z\right) \sigma_{j+|n|}^y$$

$$V_{n>0} = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^x \left(\prod_{l=1}^{n-1} \sigma_{j+l}^z\right) \sigma_{j+n}^y,$$

$$V_{n<0} = -\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^y \left(\prod_{l=1}^{|n|-1} \sigma_{j+l}^z\right) \sigma_{j+|n|}^x$$

GGE: $\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm} \lambda_n^\sigma I_n^\sigma\right]$

局所保存量の重要性

横磁場イジング模型 $\hat{H} = -J\sum_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h\sigma_i^z]$

局所保存量を構成できる：I_n

$n+2$ 個の

隣接スピン

$$I_n^+ = -J(U_{n+1} + U_{1-n}) + hJ(U_n + U_{-n}),$$

$$I_n^- = J(V_{n+1} + V_{-n-1}), \quad n \geqslant 0.$$

等価

GGE: $\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm} \lambda_n^\sigma I_n^\sigma\right]$

通常の方法との関係 $\sigma_i \to a_l \to \alpha_k$

Jordan-Wigner + Bogoliubov

GGE: $\frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \gamma_k \alpha_k^\dagger \alpha_k\right]$

$$I_n^+ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cos(nk)\varepsilon_h(k)\alpha_k^\dagger \alpha_k,$$

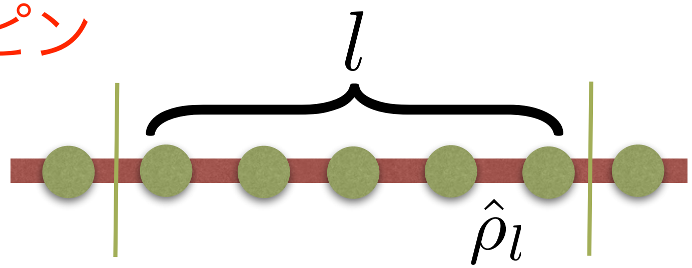
$$\gamma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^+ \varepsilon_h(k)\cos(kn) - 2J\lambda_n^- \sin[k(n+1)]$$

$$I_n^- = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} 2J\sin[(n+1)k]\alpha_k^\dagger \alpha_k$$

局所保存量の重要性

横磁場イジング模型　$\hat{H} = -J \sum_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h\sigma_i^z]$

局所保存量を構成できる：I_n　$n+2$ 個の隣接スピン



GGE: $\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} \lambda_n^\sigma I_n^\sigma\right]$

$\hat{\rho}_l$: 隣り合う l スピンに対するreduced density matrix

$(\hat{\rho}_{\mathrm{d}})_l \simeq (\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}})_l$ が（横磁場クエンチでは）成立

"Truncated GGE" を定義 $\hat{\rho}_{\mathrm{tGGE}}^{(y)} = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{tGGE}}} \exp\left[-\sum_{n=0}^{y-1} \sum_{\sigma=\pm} \lambda_{n,y}^\sigma I_n^\sigma\right]$

すると$l \lesssim y$に対しては　y よりも非局所な保存量を無視

$(\hat{\rho}_{\mathrm{d}})_l \simeq (\hat{\rho}_{\mathrm{tGGE}}^{(y)})_l$　局所的な保存量が重要！

行列要素に対するランダム行列仮説

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{d_{\mathrm{sh}}} a_i \langle E_\alpha | a_i \rangle \langle a_i | E_\beta \rangle$$

$(|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle \in \mathcal{H}_{E,\omega_{\mathrm{sh}}})$

$$\hat{\mathcal{P}}_{E,\omega_{\mathrm{sh}}} \hat{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{P}}_{E,\omega_{\mathrm{sh}}} = \sum_{i=1}^{d_{\mathrm{sh}}} a_i |a_i\rangle \langle a_i|$$

$d_{\mathrm{sh}} \leftarrow d_{\mathrm{sh}} = \dim[\mathcal{H}_{E,\omega_{\mathrm{sh}}}]$

エネルギーシェル$\mathcal{H}_{E,\omega_{\mathrm{sh}}}$への射影
（中心 E , 幅 $2\omega_{\mathrm{sh}}$ ）

- 非可積分系→$|E_\alpha\rangle$は $\{|a_i\rangle\}$の複雑な重ね合わせ
- ランダム行列仮説 L. D'Alessio et al., Advance in Physics (2016)
  →$\langle a_i | E_\alpha \rangle$は実効的にランダム（仮説）
  ($\{|E_\alpha\rangle\}$が $d_{\mathrm{sh}} \times d_{\mathrm{sh}}$ ランダム行列の固有状態分布から選ばれる)
- 仮説の帰結：
  エネルギーシェル内の固有状態に注目 $(|E_\alpha\rangle, |E_\beta\rangle \in \mathcal{H}_{E,\omega_{\mathrm{sh}}})$

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = O_{\mathrm{m}}(E)\delta_{\alpha\beta} + g(E) R_{\alpha\beta}$$

$g(E) \to 0$（熱力学極限）
$R_{\alpha\beta}$ ：ランダム変数

→ETHと有限サイズでのずれ

ハール測度

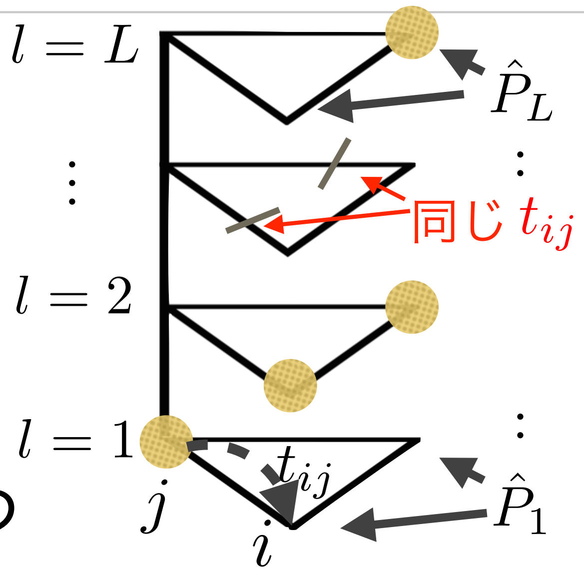
$$H = UEU^\dagger$$

$$\begin{aligned} dH &= dUEU^\dagger + UEdU^\dagger + UdEU^\dagger \\ U^\dagger dHU &= U^\dagger dUE + EdU^\dagger U + dE \\ &= U^\dagger dUE - EU^\dagger dU + dE \end{aligned}$$

$$(U^\dagger dUE - EU^\dagger dU + dE)_{ij} = \begin{cases} dx_{ii} & (i = j) \\ (x_j - x_i)(U^\dagger dU)_{ij} & (i > j) \end{cases}$$

$$dH = \prod_{i>j} |x_i - x_j|^2 \prod_i dx_i \prod_{i>j} \mathrm{Re}(U^\dagger dU)_{ij} \mathrm{Im}(U^\dagger dU)_{ij}$$

対称性を示量的な数だけ持つモデル



- 格子上のハードコアボソン

L 層の三角形、L 粒子

$$\hat{H} = -\sum_{\langle i,j\rangle} t_{ij}(\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \mathrm{h.c.})$$

t_{ij}：ランダムだが層ごとに対称性を保つ

➡ 示量的な数の局所的 $\mathbb{Z}_2$ 対称性

保存量 $\hat{P}_l \; (1 \leq l \leq L)$ ← 可換群 $G = \bigotimes_{l=1}^{L} \mathbb{Z}_2$

- ヒルベルト空間の $|G| = 2^L$ 分割

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\mathbf{q}} \mathcal{H}_{\mathbf{q}} \qquad \mathbf{q} := (q_l)_{l=1}^{L}$$

← $\hat{P}_l$ の固有値 $q_l = \pm 1$

（ある $\mathbf{q}$ に対し）

ハミルトニアンはブロック対角化：$|E_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\mathbf{q}}$

比較すべき分布

- 定常状態への緩和を仮定　　$\mathcal{O}(t) \simeq \overline{\mathcal{O}(t)}$

  $\overline{\mathcal{O}(t)}$ と $\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\mathrm{can/GGE}} := \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{can/GGE}}]$ を比較

・カノニカル分布

$$\hat{\rho}_{\mathrm{can}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{can}}} e^{-\underline{\beta}\hat{H}}$$

$$\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{H}\hat{\rho}_{\mathrm{can}}]$$

・GGE

$$\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} e^{-\underline{\tilde{\beta}}\hat{H} - \sum_{l=1}^{L} \underline{\lambda_l} \hat{P}_l}$$

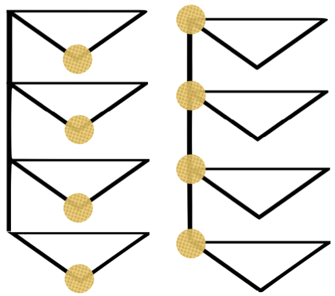
$$\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{H}\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}}]$$
$$\langle \psi_0 | \hat{P}_l | \psi_0 \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{P}_l\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}}]$$

スケーリング結果

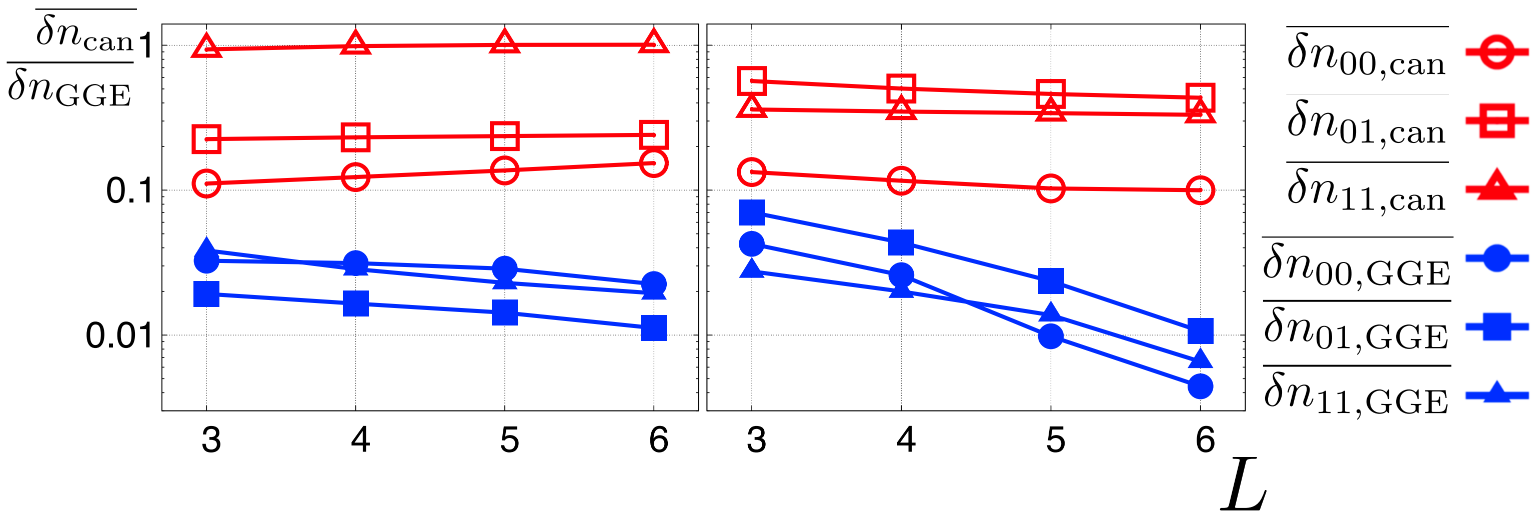
❖ 相対誤差 $\overline{\delta n_{\mathrm{can/GGE}}} := \overline{\left|\dfrac{\overline{n(t)} - \langle \hat{n}\rangle_{\mathrm{can/GGE}}}{\overline{n(t)}}\right|}$

$\leftarrow \overline{\cdots}$ ランダムネスの平均

初期状態 A　　初期状態 B



A　B

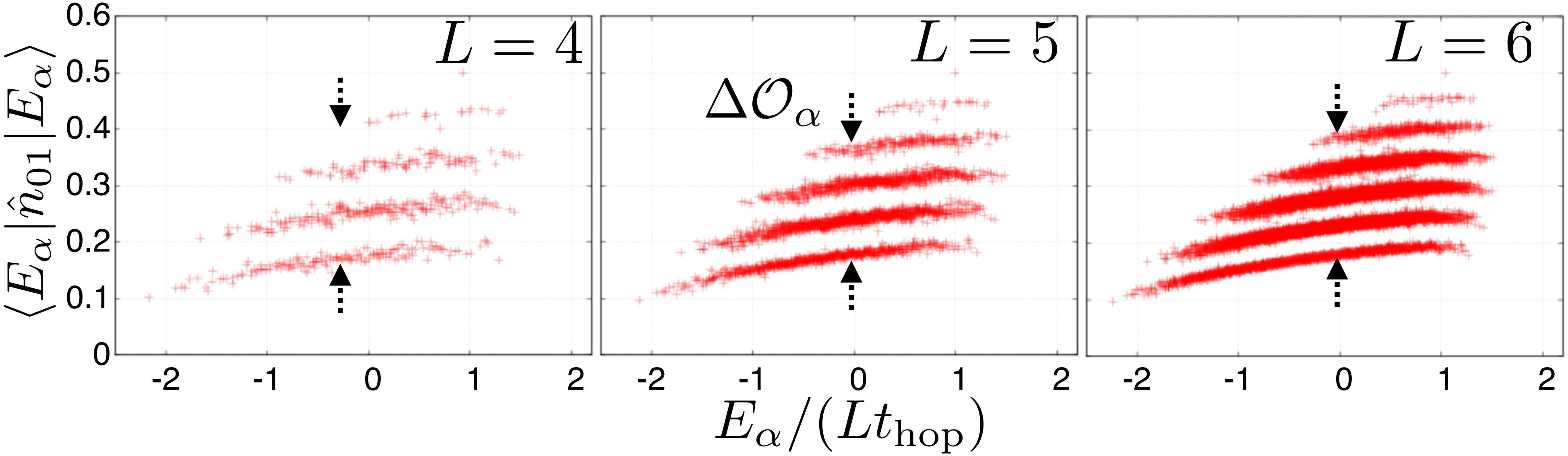


$\overline{\delta n_{\mathrm{GGE}}}$ は $\overline{\delta n_{\mathrm{can}}}$ の約10分の1

L の増加に伴い $\begin{cases} \overline{\delta n_{\mathrm{can}}} & \text{は大きなまま} \\ \overline{\delta n_{\mathrm{GGE}}} & \text{は減ってゆく} \end{cases}$

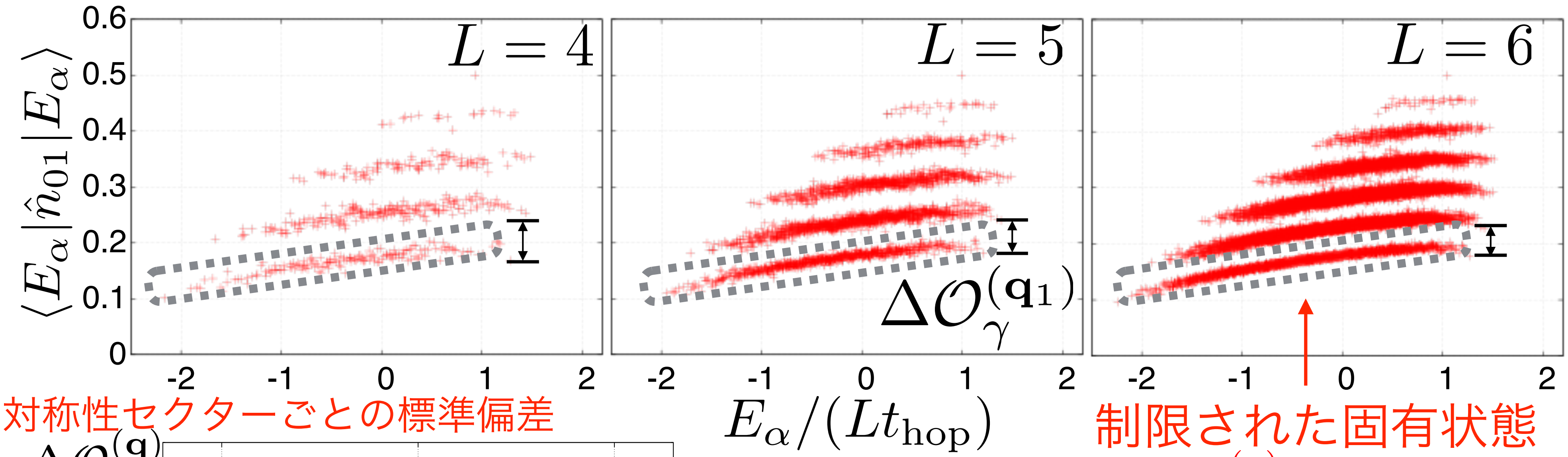
通常のETHの破れ

- 通常の対角項に関するETHは不成立

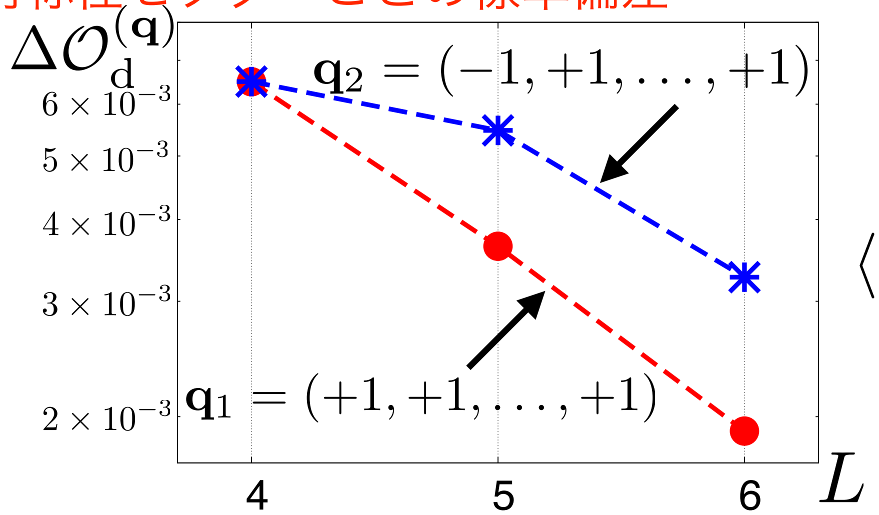


対称性セクターごとのETH

- 通常の対角項に関するETHは不成立



対称性セクターごとの標準偏差



対称性セクターごとのETH

$$\langle E_\gamma^{(\mathbf{q})}|\hat{\mathcal{O}}|E_\gamma^{(\mathbf{q})}\rangle = O_{\mathrm{m}}^{(\mathbf{q})}(E_\gamma^{(\mathbf{q})}) + \Delta\mathcal{O}_\gamma^{(\mathbf{q})}$$

なめらか　揺らぎ

$\Delta\mathcal{O}_\gamma^{(\mathbf{q})} \to 0$

→GGEを正当化

セクターごとのETHからGGEへ

$c_\gamma^{(\mathbf{q})} = \langle E_\gamma^{(\mathbf{q})} | \psi_0 \rangle$

$$\mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}}] = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\gamma} |c_\gamma^{(\mathbf{q})}|^2 \langle E_\gamma^{(\mathbf{q})} | \hat{\mathcal{O}} | E_\gamma^{(\mathbf{q})} \rangle$$

$$= \sum_{\mathbf{q}} p_{\mathbf{q}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\mathrm{mic}}^{(\mathbf{q})} (E_{\mathbf{q}}) + o(1)$$

対称性ごとのETH

$2|G| \ll \dim[\mathcal{H}]$ パラメータ

セクターごとの占有率:

$$p_{\mathbf{q}} = \sum_{\gamma} |c_\gamma^{(\mathbf{q})}|^2$$

セクターごとのエネルギー:

$$E_{\mathbf{q}} = \frac{1}{p_{\mathbf{q}}} \sum_{\gamma} |c_\gamma^{(\mathbf{q})}|^2 E_\gamma^{(\mathbf{q})}$$

これらのパラメーターを $\hat{H}, \hat{P}_l$

を用いて適切にフィッティング！

セクターごとのETHからGGEへ

$$c_\gamma^{(\mathbf{q})} = \langle E_\gamma^{(\mathbf{q})} | \psi_0 \rangle$$

$$\mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}}] = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\gamma} |c_\gamma^{(\mathbf{q})}|^2 \langle E_\gamma^{(\mathbf{q})} | \hat{\mathcal{O}} | E_\gamma^{(\mathbf{q})} \rangle$$

$$= \sum_{\mathbf{q}} p_{\mathbf{q}} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\mathrm{mic}}^{(\mathbf{q})} (E_{\mathbf{q}}) + o(1)$$

対称性ごとのETH

- Restricted GGE (rGGE)

$$\hat{Q}_0 = \hat{H}, \hat{Q}_l = \hat{P}_l \ (1 \le l \le L)$$

$$\hat{\rho}_{\mathrm{rGGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{rGGE}}} e^{-\sum_{l=0}^{L} \underline{\kappa_l} \hat{Q}_l - \sum_{l<m} \underline{\kappa_{lm}} \hat{Q}_l \hat{Q}_m - \cdots}$$

$2|G|$個の条件から決定

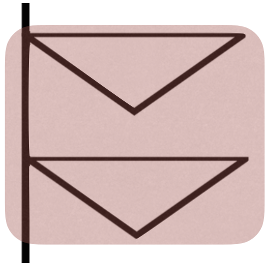
$$\langle \psi_0 | \hat{Q}_l \hat{Q}_m \ldots | \psi_0 \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mathrm{rGGE}} \hat{Q}_l \hat{Q}_m \ldots]$$

$$p_{\mathbf{q}}, E_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{d}}] = \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}_{\mathrm{rGGE}}] + o(1)$$

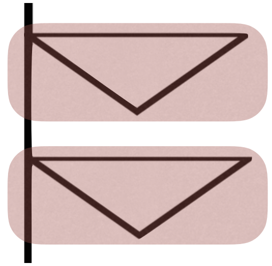
rGGEからGGEへ

- $\hat{Q}_l\hat{Q}_m\ldots$は $\hat{n}_{00},\hat{n}_{01},\hat{n}_{11}$ よりも非局所的

複数の層にまたがる



各層のオペレーターの和として書ける



- 仮説：非局所な保存量はGGEに寄与しない

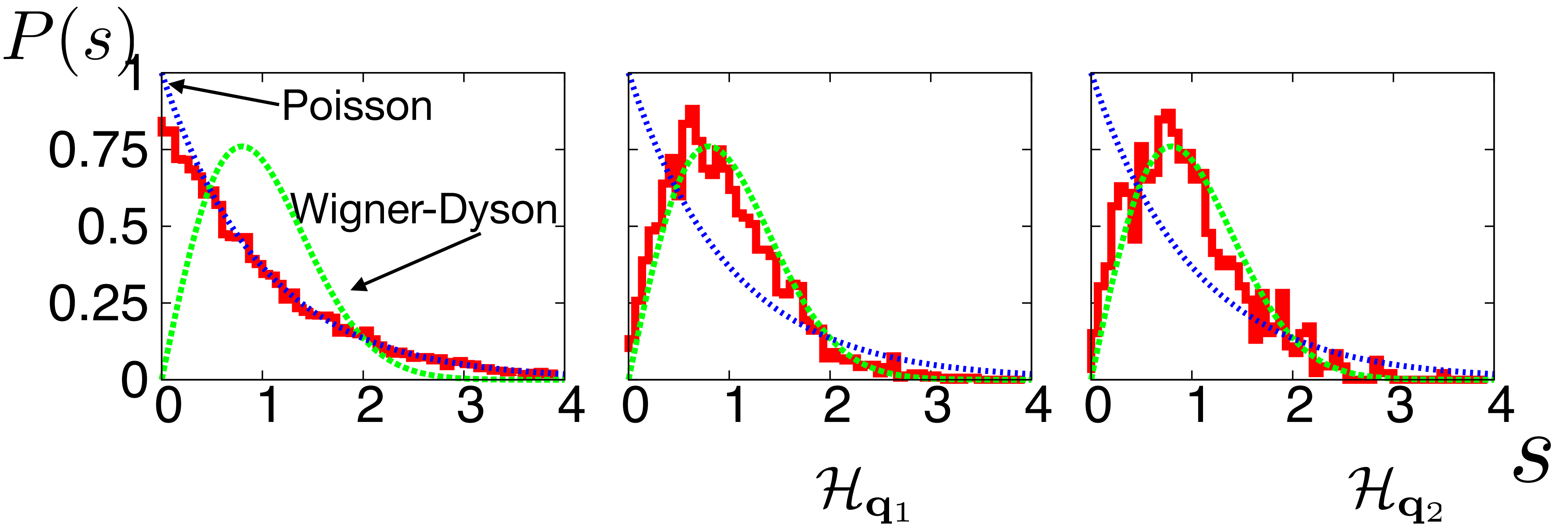
可積分系で同様の仮説

$$\rightarrow \mathrm{Tr}[n\hat{\rho}_{\mathrm{d}}] \simeq \mathrm{Tr}[n\hat{\rho}_{\mathrm{rGGE}}] \simeq \mathrm{Tr}[n\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}}]$$

$$\hat{\rho}_{\mathrm{GGE}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{GGE}}} e^{-\sum_{l=0}^{L}\lambda_l\hat{Q}_l}$$

高次の相関を無視

準位統計

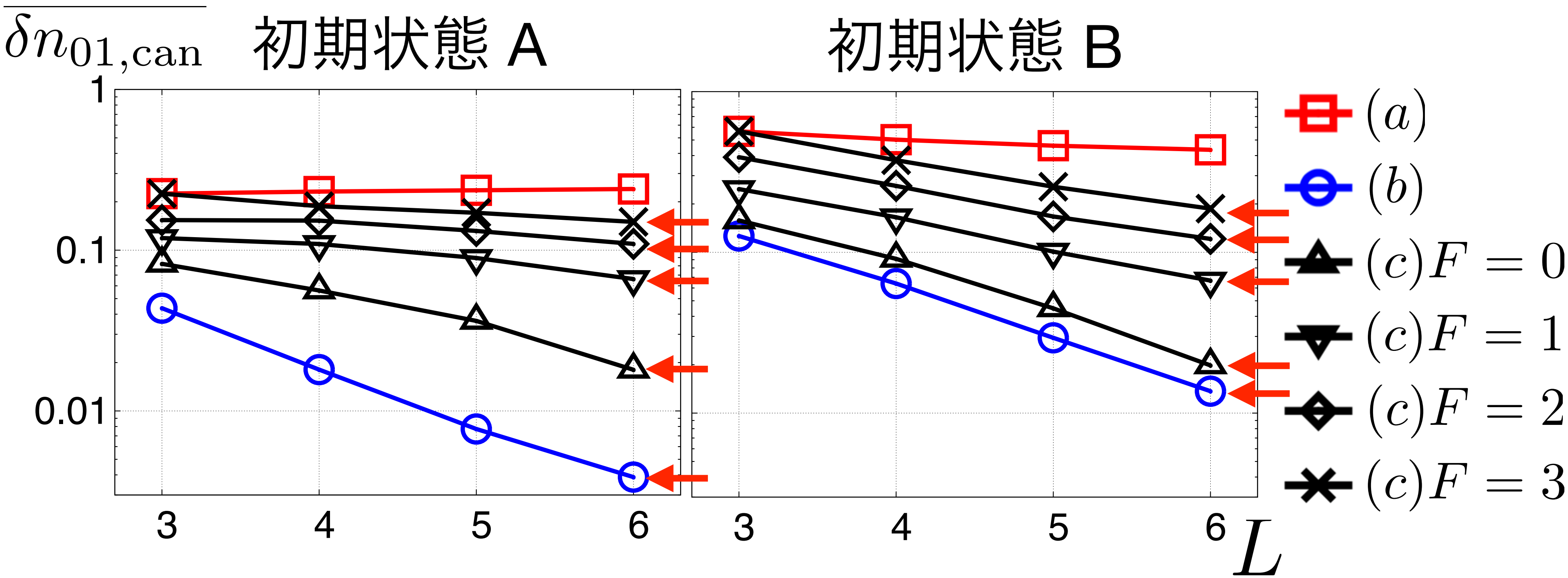


全スペクトル　　セクターごとのスペクトル

対称性セクターで分割

非可積分系の性質を持つ！

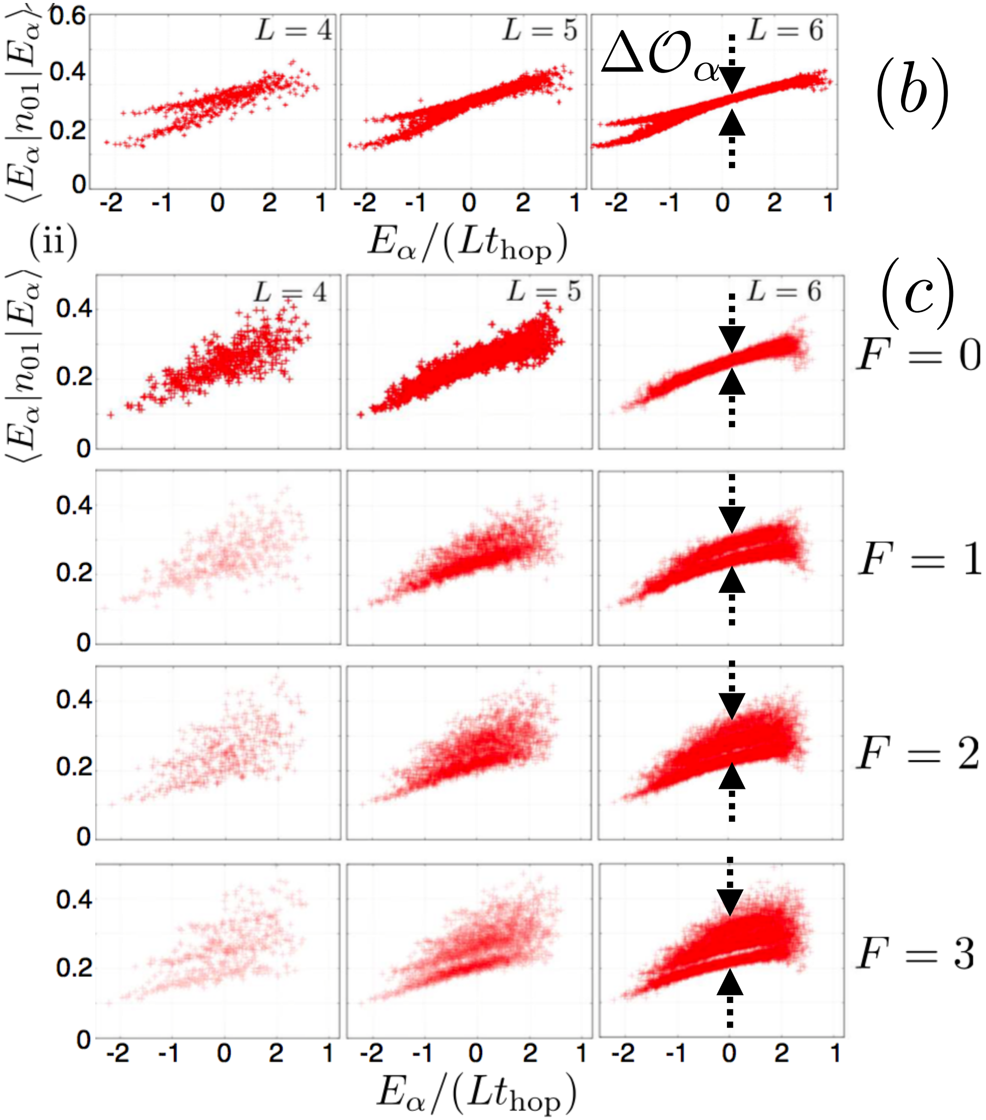
カノニカル分布の正当性



L の増加に伴い $\begin{cases} (b),(c)F=0: \text{急速に減少} \\ (c)F=1,2,3: \text{（穏やかではあるが）減少} \end{cases}$

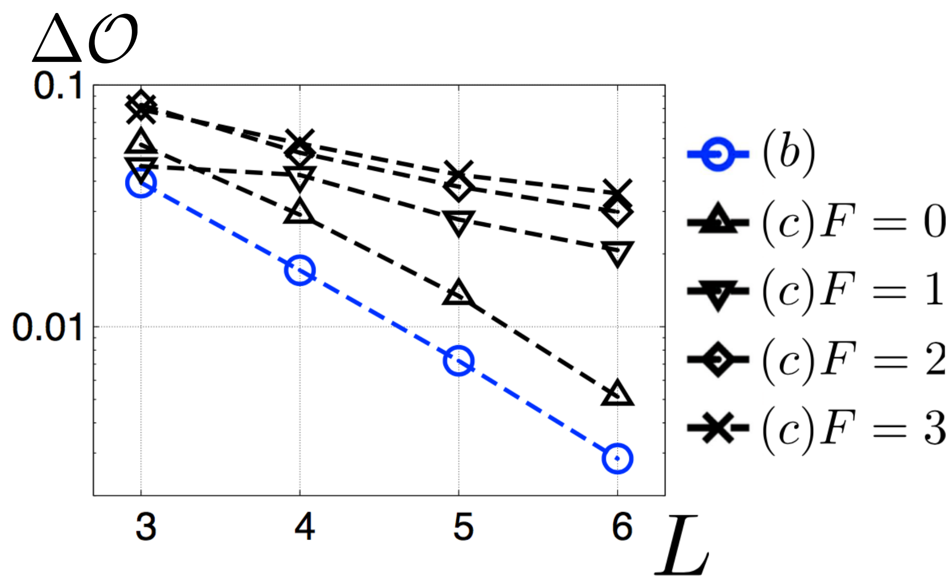
→カノニカル分布へと緩和

他のモデルでのETHの正当性



$\Delta\mathcal{O}_\alpha$ は L と共に減少

（ $F \geq 1$ では穏やか）



ヒルベルト空間の次元

モデル (a) については

L; K	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	total
3	35(1)	12(3)	4(3)	1(1)				84
4	160(1)	53(4)	17(6)	5(4)	1(1)			495
5	752(1)	244(5)	77(10)	23(10)	6(5)	1(1)		3003
5	3599(1)	1152(6)	360(15)	108(20)	30(15)	7(6)	1(1)	18564

$$\dim[\mathcal{H}_{\mathbf{q}}]$$
$$\#[q_l = -1] = K$$

$$D_K = \sum_{s}^{[\frac{L-K}{2}]} \binom{L-K}{s} \cdot \binom{2L-K-s}{L-K-2s}$$

$$\dim[\mathcal{H}]$$

$$D = \sum_{K=0}^{L} \binom{L}{K} D_K$$

各々の対称性セクターへの初期状態の重み

恒等式: $$|\psi\rangle = \sum_{q_1,\dots,q_l=\pm 1} \underline{\left\{\left[\frac{1}{2^L}\prod_{l=1}^{L}(1+q_l\hat{P}_l)\right]|\psi\rangle\right\}}$$

固有値 $(q_1,\dots,q_l)$ に対応する $(\hat{P}_1,\dots,\hat{P}_l)$ の固有状態

規格化された射影演算子: $\hat{\mathcal{P}}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2^L}\prod_{l=1}^{L}(1+q_l\hat{P}_l)$

$$\langle\psi_0^A|\hat{P}_{l_1}\hat{P}_{l_2}\dots|\psi_0^A\rangle = 0 \longrightarrow p_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2^L}\prod_{l=1}^{L}(1+0)$$

$$\langle\psi_0^B|\hat{P}_{l_1}\hat{P}_{l_2}\dots|\psi_0^B\rangle = 1 \longrightarrow p_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2^L}\prod_{l=1}^{L}(1+q_l)$$

$$\text{(Case A)}\quad p_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2^L}\quad (\text{for all } \mathbf{q} = (q_1,\dots,q_L))\,,$$

$$\text{(Case B)}\quad p_{\mathbf{q}} = \begin{cases} 1 & (\mathbf{q}_1 = (+1,\dots,+1))\,; \\ 0 & (\text{otherwise})\,. \end{cases}$$

無限温度のカノニカル分布

逆温度についての方程式

$$0 = E_0 = \frac{1}{Z_{\mathrm{can}}} \sum_\alpha E_\alpha e^{-\beta E_\alpha}$$

$\mathrm{Tr}[\hat{H}] = \sum_\alpha E_\alpha = 0$ より

$$\longrightarrow \beta = 0,\ \hat{\rho}_{\mathrm{can}} = \frac{1}{\dim[\mathcal{H}]}$$

カノニカル分布を用いて

$$\langle n_{00} \rangle_{\mathrm{can}} = \langle n_{01} \rangle_{\mathrm{can}} = \langle n_{11} \rangle_{\mathrm{can}} = \frac{1}{4}$$

オブザーバブル

$$\hat{\tilde{n}}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{2^2 L N_a} \sum_{i,j} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

k_z方向をトレースアウト

二次元の運動量の占有数

$$\hat{n}(k_x, k_y) = \frac{1}{2^2 N_a} \sum_{i,j} \delta_{z_i, z_j} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

$$= \frac{1}{2^2 N_a} \sum_{i,j:\text{same } l} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

$$n_{k_x, k_y} := \hat{n}(k_x \pi, k_y \pi)$$