特集／波動関数のミステリー

量子測定の原理とその問題点

清水　明

1. はじめに

プレプリントサーバー*1)で「quantum physics」に分類される分野が，近年非常に盛んになってきた．筆者も，プレプリントサーバーに投稿する時は，最近は quantum physics 分野に投稿することが一番多くなった．昔は， quantum physics とは，単に量子論を使った物理の事を指していたが，最近はそういう意味ではなくて，量子論の本質そのものを探る分野，というような位置づけになっている．そういう分野が盛んになるとは，一昔前には考えられないことであったが，ようやくそういう時代が来たか，と感慨せずにはいられない．

さて，その quantum physics では，当然ながら，量子測定に関する研究も行われている．よく知られているように，量子論の論理体系[1] のなかで，測定後の状態に関する公理（射影仮説）は一番解りにくい．しかしながら，この公理は，量子論が実験と矛盾しないために，かつ，内部矛盾を引き起こさないために，必要に迫られて導入されたものである．これまで，物理の大部分の分野で，この公理を使わずに済んだ（従って，あまり真剣に考えずに済んだ）のは，考えて見れば不思議である．どんな公理系でも，その公理系に必須の公理のひとつを使わずに済むような研究しかしなかったら，その公理系の本質は理解できないと思うからである．

本稿では，量子測定の研究がかなり進んだこの機会を捉えて，根本のところに横たわる問題をもう一度振り返り，現時点での理解と残された問題点（と筆者が考えていること）を概説することを試みる．

なお，本稿と合わせて，以前書いた関連する解説[2~4] を読んでいただくと，解り易いと思う．また，本解説の性質上，参考文献には，筆者が書いたものを中心に挙げることになる．より詳しく知りたい読者は，それらの文献に引用されている文献も参照されたい．

2. 復習

説明の都合上，スピンを測定する場合を例にとり，その状態ベクトルの変化を復習しておく．

スピン 1/2 を持つ系の状態ベクトルを $|\psi\rangle$ とし，そのスピンの z 成分 σ_z を測る場合を考えよう．量子論では，**測定器も量子論に従う物理系である**，と考えるのが本質なので，測定過程を記述する場合には，被測定系と測定器の全体系の時間発展を考える必要がある[1,5,6]．測定前の，測定器の状態（目盛りが $+, -$ の中間にある状態）を $|M_0\rangle$，全体系の状態を

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle|M_0\rangle \tag{1}$$

とする．測定を行うには，被測定系と測定器を相

*1)　http://xxx.lanl.gov/ にある。

互作用させて，被測定系の情報を測定器にコピーしてくる必要がある．全体系は閉じた量子系であると考えると，この過程は，ユニタリー時間発展として，適当なユニタリー演算子 $\hat{U}$ で書けるはずである：

$$|\Psi\rangle \to \hat{U}|\Psi\rangle \tag{2}$$

この $\hat{U}$ の性質だが，この測定が理想的である場合には（理想的でない場合のことは後で触れる），σ_z の値が（$\hbar/2$ を単位にして）±1 に定まった状態 $|\pm\rangle$ を測定した時に，被測定器の状態は $|\pm\rangle$ のままで，測定器の状態は，目盛りが ±1 を示す状態 $|M_\pm\rangle$ に変化しなければならない（複合同順）．即ち，

$$|\pm\rangle|M_0\rangle \to \hat{U}|\pm\rangle|M_0\rangle = |\pm\rangle|M_\pm\rangle \tag{3}$$

被測定系の状態はあらかじめ知っているわけではないので，測定器の動作パラメータはどんな $|\psi\rangle$ についても同じである事に注意しよう．つまり，$\hat{U}$ は，$|\psi\rangle$ に依存しない演算子である．このことと，$\hat{U}$ が線形演算子であることに注意すると，上式から，被測定系の状態が重ね合わせ状態

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \tag{4}$$

にある場合の測定後の状態が，

$$\begin{aligned}&\hat{U}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)|M_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|M_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle|M_-\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

だと知れる．一方，量子論の公理のひとつである射影仮説を，全体系に適用すると，測定後の状態は，

$$\begin{aligned}&\text{測定値が } +1 \text{ の時は，} \ |+\rangle|M_+\rangle \\ &\text{測定値が } -1 \text{ の時は，} \ |-\rangle|M_-\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

となる．これは明らかに (5) とは異なる．だったら射影仮説なんか捨ててしまえ，と考えたくなるが，射影仮説は，量子論が，実験事実と合致しかつ無矛盾な理論体系になるために必要であるからこそ導入された公理なのである．たとえば，Born の確率規則と全体系の状態ベクトルとが整合するためには，少なくとも測定器の状態については，(6) のようになっていなければならないのは明らかであろう．

しかし，射影仮説は，どうにも気持ちが悪いと感じる人が多く，なんとか，量子論を射影仮説なしで体系づけようという試みが昔から多数なされてきた．それは，どこまでうまくいっているのだろうか？

3. 射影仮説の２つの役割

前節までは誰でも知っていると思うが，少し詳しく分析する段階になると，一般に，かなりの混乱が見られるように思えるので，まずそこを整理しておこう．

射影仮説には，次の**２つの役割がある**：

(A) 異なる測定値に対応する状態ベクトルの間の干渉をなくす

(B) 干渉の無くなった２つの状態ベクトルのうちのどちらかを抜き出す

これらを順に説明しよう．

まず，(A) については，フォン・ノイマンがその有名な本[5)] の中で示そうと苦闘した点であるので，比較的良く知られている．今，同じ $|\Psi\rangle$（(1) 式）を持つ量子系を多数用意した「アンサンブル」を考え，それぞれについて σ_z を測定した時の，測定後の状態を考えよう．(6) を用いると，アンサンブルの中の量子系のうち，どれが測定値 $+1$（従って状態は $|+\rangle|M_+\rangle$）で，どれが測定値 -1（状態は $|-\rangle|M_-\rangle$）かが**個別に**判っている．フォン・ノイマンは，ここから「どれが測定値…」という個別の情報を捨ててしまった密度行列を考えた．つまり，単に２つの状態を，それぞれがアンサンブルに含まれる割合 (今の場合 1/2) で混合した，

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\rm mix} = &\ \frac{1}{2}|+\rangle|M_+\rangle\langle M_+|\langle+| \\ &+ \frac{1}{2}|-\rangle|M_-\rangle\langle M_-|\langle-|\end{aligned} \tag{7}$$

を考えた．量子系の状態を表す状態ベクトルとか密度行列とかは，その量子系に関して知りうる限

りの情報を盛り込んだものであるが，この密度行列は，情報を一部捨ててしまっているので，**量子系の完全な（というか，最良の）密度行列ではない**．*2) 便利なので（筆者も）よく使うが，このことを承知していないと，混乱の大きな原因になる．ともあれ，(7) と，(5) を密度行列で表した

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\rm unitary} \;=\;& \frac{1}{2}|+\rangle|M_+\rangle\langle M_+|\langle+| \\ &+\;\frac{1}{2}|-\rangle|M_-\rangle\langle M_-|\langle-| \\ &+\;\frac{1}{2}|+\rangle|M_+\rangle\langle M_-|\langle-| \\ &+\;\frac{1}{2}|-\rangle|M_-\rangle\langle M_+|\langle+| \qquad (8)\end{aligned}$$

とを比較してみると，後ろの２つの項だけ余分である．この項が，σ_z の異なる２つの状態の間の干渉の存在を示しているので,「干渉項」と呼ばれる．(A) だけを示すのが目的であれば，(8) が (7) と等価であることを示せ，という問題に帰着する．

一方, (B) は, (7) から $|+\rangle|M_+\rangle$ または $|-\rangle|M_-\rangle$ を取り出してそれを測定後の状態ベクトルにする，という操作である．5 節で解説するように，**(A) もまだ未解決の問題**であるが，**仮に (A) が解決できたとしても，まだ，(B) を示したことにはならない**，という点に注意しなければならない．まず後者から説明しよう．

4. 抜き出す操作の問題

仮に (A) が示せても (B) を示したことにはならない，という理由は２つある．それを順に説明しよう．

4.1 密度行列の分解の非一意性

まず第１の理由は，(6) から，その情報を一部捨てた (7) を導き出すのは一意的にできるが，逆に，(7) が得られたときに，それを分解する仕方はひとつには限らない事である．実際，(7) は，例えば次の式と恒等的に等しいことが簡単な計算で示せる：

$$\hat{\rho}_{\rm mix} = \frac{1}{2}|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \frac{1}{2}|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \qquad (9)$$

ただし,

$$|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|M_+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle|M_-\rangle \qquad (10)$$

従って，(7) を,「$|+\rangle|M_+\rangle$ あるいは $|-\rangle|M_-\rangle$ のどちらか一方が実現された状態」と解釈できるのであれば，その (7) を，(9) のように恒等変形した上で,「$|\Psi_+\rangle$ あるいは $|\Psi_-\rangle$ のどちらか一方が実現された状態」とも解釈できてしまう．このため，(7) だけ見ていても，どちらの解釈をとるべきか，決めようがないのである．なお，(7) を (9) のように恒等変形できたのは，量子論の特徴である重ね合わせの原理のためである．だから，**ここで述べた分解の非一意性は，古典論にはない，量子論特有のもの**である．

$|\Psi_\pm\rangle$ は，測定器の目盛りが $+1$ の状態と -1 の状態とが重ね合わされている，という直感的には奇妙な状態である．しかし,「奇妙な状態だから排除する」というのは通常の量子論の公理系にはないので，そういう考え方をしたいのであれば，それを新たに公理として採用する必要がある．その際,「奇妙」と言っても，その程度は様々である．そのような奇妙な状態を人工的に作ろうという研究さえ行われている．従って，公理として採用するためには，まず，奇妙さの程度を定量化する理論を作り，そして，どの程度奇妙だったら許さないようにするかを明示する必要があるが，それは量子論に，その「程度」の臨界値を決めるあらたな定数を持ち込むことにもなりそうで，まだ誰も満足のいく定式化に成功していない．

ちなみに，よく，量子論や統計物理学の教科書で，密度行列を説明するときに,

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i|i\rangle\langle i| \qquad (11)$$

という式を書き,『これは，w_i という確率で純粋

---

*2) アンサンブルを考えること自体はもちろん良いのだが，情報を最大限に持たせるためには，測定後は，測定値が $+1$ だった系だけのアンサンブルと，測定値が -1 だった系だけのアンサンブルの，２つに分ける必要がある．そういう２つのアンサンブルの量子状態は，(6) で記述される．

状態 $|i\rangle$ にある状態を表す』と説明することが多いが，これは正確な記述とは言い難い．そういう状態に対して，一部の情報を捨ててこの密度行列を得ることはできるが，逆にこの密度行列だけから,『…』のような事を言うことはできないからだ．なぜなら，上述のように，別の基底 $|n\rangle$ を用いて，

$$\hat{\rho} = \sum_n w'_n |n\rangle\langle n| \tag{12}$$

とも表せてしまうからである．例えば，統計物理の教科書では，この点に関して正しく記述されていたのは，筆者の知る限り，ランダウ[7] やファインマンなどの少数の本だけであった．量子論の基礎は，プロの物理学者にも難しいのである．

4.2 論理学の基礎的な問題？

(A) から (B) が導けないもうひとつの理由は，論理学の基礎的な問題という要素を多分に持っていて，ややこしい.（**そういう問題に触れることが嫌いな読者は，次節に飛ぶことを強く勧めます！**）筆者も時々わからなくなり，考えが揺れるが，とにかくひとつの考えに沿って説明しよう．

仮に，測定器との相互作用が終わった後の密度行列が，めでたく (7) の形に求まったとしよう．しかし，そこから，突然一方の項だけを抜き出すのは，どういう公理なり原理なりを使ったのか？**そもそも，上で述べた分解の非一意性の問題がある**し，それをさしおいても，突然一方の項だけを抜き出すのは，どうやって正当化できるのか?観測者がみるのだからあたりまえ，というのは答えにならない．実際，**観測者も量子論で記述できると信じる限りは**（普通，物理学者はそう信じたい，あるいは，信じている！），観測者も含むさらに大きな全体系に対して上と同じ論理が成立するので，射影仮説を使わなければ，測定後の状態は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|M_+\rangle|O_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle|M_-\rangle|O_-\rangle \tag{13}$$

となる．ここで，$|O_\pm\rangle$ は，観測者が測定器の目盛りが ± 1 を示していることを認識している状態である．これを，突然，$|+\rangle|M_+\rangle|O_+\rangle$ または $|-\rangle|M_-\rangle|O_-\rangle$ のどちらか一方にしてしまうのは，よく考えてみると，射影仮説 (A),(B) そのものである．仮に，(13) が，何らかの理由で，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|+\rangle|M_+\rangle|O_+\rangle\langle O_+|\langle M_+|\langle +| \\ &+ \frac{1}{2}|-\rangle|M_-\rangle|O_-\rangle\langle O_-|\langle M_-|\langle -| \end{aligned} \tag{14}$$

と等価であることを示せたとしても，やはり，この状態を，突然，$|+\rangle|M_+\rangle|O_+\rangle$ または $|-\rangle|M_-\rangle|O_-\rangle$ のどちらか一方にしてしまうのは，射影仮説の (B) そのものである．射影仮説を導くのに，当の射影仮説を用いてしまってはいけない！

要するに，どちらか定まらないものから，どちらか一方だけを選び取るためには，**いつも定まった値をとるようなダイナミックスに従うものが必要**なのである．しかるに，この世界の全てが量子論のユニタリー時間発展に従うと考えると，そのような，常に定まった値をとるダイナミックスに従うものが存在しなくなってしまうので，困るのである．射影仮説は，このやっかいな問題を断ち切る役割も担っているのだ．

ちなみに，この問題を突き詰めて考えると，ゲーデルの問題や「意識」の問題に突き当たるであろう．Wigner や Penrose など，多くの偉大な物理学者が，こういう問題に言及する（言及せざるを得ない）のは，このような理由によると思われる．たとえば,「そもそも，どんな論理体系であれば，このような問題が発生しないですむだろうか？」と言う問いを発して深く考えてみれば，誰でもこのような問題を一度は考えざるを得なくなるであろう．あるいは，そこまでいかなくても，有名な「Wigner の友人のパラドックス」（Wigner にとっての状態ベクトルと友人にとっての状態ベクトルが異なる）を考えてみれば，自分の意識だけを，上述の「いつも定まった値をとるようなダイナミックスに従うもの」として特別扱いするしかないようにも思えてくる．デカルトに習って,「我思う故に我あり」とするしかないと．これはいかにも気に入らないが，一旦それを承認しさえすれば決して矛盾が生じないことに気づき，唸ってしまうで

あろう．

5. 干渉項は消えるか？

さて，射影仮説の２つの役割 (A),(B) のうち，(A) の方なら，ユニタリー時間発展の範囲内でなんとかなるんじゃないか，という議論がいくつかある．その代表的なものを２つ紹介しよう．

5.1 実験の困難さ

ひとつめは，(8) の干渉項の存在を確かめられるような実験は，遂行するのが著しく困難で，現実には不可能だろう，従って，(8) は実質的には (7) と等価である，という考え方である．困難である理由は，測定器が，一般に，非常に自由度が大きいマクロな系であり，$|M_+\rangle$ と $|M_-\rangle$ は，そのようなマクロな系のマクロな数の自由度の状態が異なっているような２つの状態だからである．そのような状態間の干渉項の存在を確かめるための実験は，マクロな数の自由度を干渉計にかけることになり，通常の１自由度系の実験に比べて，比較にならないほど難しい．$|M_+\rangle$ と $|M_-\rangle$ とで状態が異なるような自由度のただひとつでも測らなければ，干渉項は測定で検出できなくなってしまうからである.[2)]

しかし，この論理では,「干渉項がないとしてしまってよいためには，どのくらい測定が難しければ良いのか」という定量的な議論が抜けているので，科学としては全く不完全である．さらに,「いくら難しくても，原理的に測れるならば，基礎的な理論の考察では，測れるとして議論すべきだ」という意見も無視できない．

5.2 環境によるディコヒーレンス

ふたつめは,「環境」による干渉項の消失（ディコヒーレンス）という考え方だ.[2)] 実際の物理系では，完全に閉じた系というのは,（宇宙全体以外には）ありえない．つまり，その物理系をとりまく環境と，多少なりとも相互作用している．それなのに，環境を測らずに，被測定系＋測定器とか被測定系＋測定器＋観測者だけを測ると，干渉項がないときの結果しか得られない．なぜなら，たとえば被測定系＋測定器＋環境という全体系の測定後の状態は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|M_+\rangle|E_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle|M_-\rangle|E_-\rangle \tag{15}$$

と書ける．ここで，$|E_\pm\rangle$ は，測定器の目盛りが ±1 になったときの，まわりの環境の状態である．この状態に対して，被測定系＋測定器だけを測ると，干渉項の大きさは，環境と相互作用していない場合に比べて，$|\langle E_+|E_-\rangle|$ 倍になる.[2)] この内積は，環境の自由度のうち，測定器の目盛りの位置に多少とも左右されるものの数を N とすると，およそ

$$|\langle E_+|E_-\rangle| \sim \exp(-\text{正定数} \times N) \tag{16}$$

の程度になる.[2)] ここの正定数は，物理系によって異なる値をとるだろうが，いずれにしても N がとてつもなく大きいだろうから，干渉項はとてつもなく小さくなる．これを避けるためには，環境まで含めて測ればいいのだが，それは不可能だ．なぜなら，環境系には，それと相互作用する別の環境系があり，その環境系もまた別の環境系と相互作用し…という具合に，環境はどこまでも続いていて，どこまで測っても足りないからだ，という論理である．

しかし，この議論にも欠点がある．今，座標原点付近で，時間 T だけかけて測定を行ったとしよう．相対論の要請から，この測定のために変化を受けるのは，原点を中心とする半径 cT の球の内部にある自由度だけである．従って，上記の N は，

$$N \leq \text{正定数} \times (cT)^3 \tag{17}$$

である．ここの正定数は,「測定器のエネルギーが有限であることから，あまりエネルギーの高いモードは変化しない」ということから決まるファクターであるが，具体的な値がいくらにせよ，有限であることが重要である．(16), (17) を合わせると，干渉項にかかる因子 $|\langle E_+|E_-\rangle|$ は，最小でも，

$$\exp(-\text{正定数} \times (cT)^3) \tag{18}$$

の程度までにしかならず，確かに非常に小さいが，**決してゼロではない**ことがわかる．そうすると，「干渉項がどのくらい小さければゼロとおいて良いのか？」という定量的な議論がない限りは不完全である．そして，もしもそのような定式化を行ったとするならば，その大きさの限界値を決める定数が，新たに量子論に入ってきそうであるが，それは，量子論の本質的な拡張を意味する．そのような定式化に成功した人はまだいない．

以上述べたことの，もう少し数学的な説明も書いておこう．示したいことは，$t = 0$ で，ある既約なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のベクトルであった全体系の状態ベクトル $|\Psi\rangle$ が，シュレディンガー方程式に従って時間発展した結果，$t = T$ で，$|\Psi(T)\rangle \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ のように，可約なヒルベルト空間 $\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ のベクトルになってしまう，ということである．ここで，$\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ はそれぞれ，$|+\rangle|M_+\rangle|E_+\rangle$, $|-\rangle|M_-\rangle|E_-\rangle$ の属するヒルベルト空間で，互いに「直交」している．[2] しかし，これは，T が有限である限りは，あり得ない．なぜなら，相対論の要請を満たす局所的な理論であれば，全体系のハミルトニアンは，局所的なハミルトニアン密度 $h(x)$ の積分で書ける：

$$H = \int h(x) d^3x \tag{19}$$

このハミルトニアン密度を用いて，$|\Psi\rangle$ の時間発展は，次のシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \int h(x) |\Psi(t)\rangle d^3x \tag{20}$$

を $t = 0$ から T まで積分して得られる．しかし，T が有限である限りは，この時間発展は何ら特異性をもたらさないので，$|\Psi(T)\rangle \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ のようになることはあり得ない．**数学的には**，無限大の極限をとりさえすれば特異性がひねり出せるのだが，**物理的には**（つまり実際の自然界では）無限大は無いので，特異性が出てこなくて困ってしまうのである．

なお，割とポピュラーになっている，**「Consistent Histories」とか「多世界解釈」などの理論でも，干渉項が消えることが大前提になっている***3)ので，この節で述べた，「実は干渉項が完全に消えることは示せていない」という問題は，大問題として残ったままになっている事を注意しておく．

6. 「理想測定」とは何か？

以上の話は，簡単のため，理想測定を仮定していた．ところで，「理想測定」とは何か？それは，誤差が無く，かつ，測定後の量子状態が射影仮説 (6) のようになる測定の事である．(6) は，測定器の状態も含めて書いてあるが，被測定系の状態とは単純な積になっている（積の和にはなっていない*4)）ので，被測定系の状態だけについて抜き出して書いてもよい．つまり，

$$\begin{aligned} &\text{測定値が } +1 \text{ の時は，} \quad |+\rangle \\ &\text{測定値が } -1 \text{ の時は，} \quad |-\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

この書き方を用いると，『誤差が無く，かつ，測定後の量子状態が，(21) の射影仮説に従うものになる測定』というのが理想測定の定義である．[1] 一方，やはりこの書き方を用いて射影仮説を述べると，『測定が理想測定であれば，測定後の状態は (21) のようになる』という公理であった．[1,5]

しかし，この２つを比べてみると，アレ？と思われるだろう．理想測定の定義には射影仮説を用いており，一方，射影仮説の論述には理想測定を用いている．従って，堂々巡りのトートロジーになってしまっていて，このままでは，きちんとした定義や公理になっていない．だから，正確には，射影仮説というのは，次のように述べるべき公理なのである[1]：『誤差が無く，かつ，測定後の量子状態が，(21) のようになる測定過程が存在する．これを，「理想測定」と呼ぶ．』

---

*3)　Everett の元々の多世界解釈の論文では，このことを分析していなかったために，Wigner などから強い批判を浴びた．

*4)　積の和になっていると，各測定値ごとに，測定器の状態について部分対角和 (partial trace) をとったときに，(21) のようにはならない．

これを用いて，理想的でない測定の場合まで分析できる．それを次節で述べよう．

7. 非理想測定

上でも述べたように，**量子論では，測定器も量子論に従う，と考えるのが本質的**である．従って，測定過程を分析するには，測定器（の一部）も，量子系の仲間に入れて，被測定系＋測定器の全体系を，量子論自身を用いて分析すれば良い．[5,6]

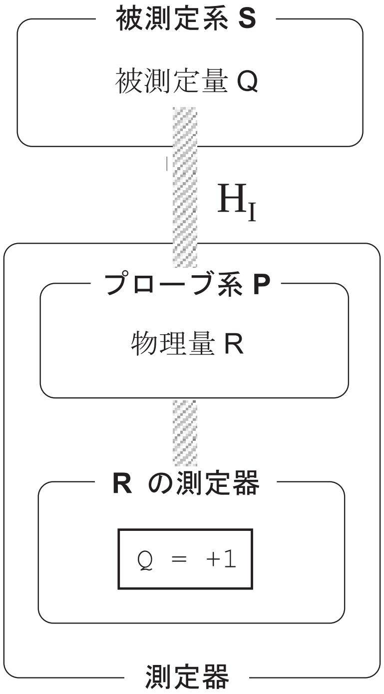

図 1　測定過程の模式図．（文献[6]の図を再構成した．）

図 1 のように，被測定系 S のある物理量 Q を測る場合，S を測定器の一部（プローブ系 P と呼ぶことにする）と相互作用させ，Q の情報を，P のある物理量 R に「コピー」してくる．ここで,「コピー」と言ったのは，Q の値と R の値が相関するようにする，という意味であり，そっくり写し取るなら理想的だが，そうでなくても，何か関連付けば良い．そして，測定器の中には，この R の値を測る部分が付いている．R の値は，Q の値と相関しているので，この R の値から Q の値を推定することができる．その推定の仕方は，測定器の構造により決まるが，R の測定値から，その推定のルールにのっとって求めた Q の推定値を，ディスプレイとか目盛りとかに表示するのが測定器の動作原理である．

このように分解して考えると，R を測る過程は理想測定と見なせるので，射影仮説が使える．(逆に言えば，公理より，理想測定と見なせる過程が存在するので，R の測定が理想測定になるように P を選ぶ！）つまり，**理想測定と見なせる境目までは，量子論に従う系の一部として扱い，そこから先を考えることは，射影仮説により遮断する**．それが，一般の測定過程の分析の仕方の処方箋である．この境目 (「Heisenberg cut」と呼ばれる）の位置には任意性があるが，先の方にずらす分には，まったく同じ結果を与えるので，要するに，充分に大きな系を量子論に従う系として扱っておけば，結果には任意性は出ないのである．[5,6]

理想測定されているのは R であって，本来測りたい Q の値は，R の値から推定されているだけだから，一般には誤差が出る．また，射影仮説は，R の固有値空間に射影する，という形で適用されるので，Q の固有値空間に射影することには，一般にはならない．この 2 つの理由により，このような一般の測定は，Q については理想測定にはなっていない．このようにして，理想測定でない一般の場合でも，量子論の普通の公理（シュレディンガー方程式や射影仮説など）だけを用いて分析することができるのである．実際，そのようにして，様々な有用な結果が導かれている．[3,8,9]

なお，最近，量子情報理論などで，POVM 測定などの，射影仮説よりも一見広い仮説を測定の公理として採用する文献が増えてきている．しかしながら，それらの一般化された測定も，ここで述べた非理想測定の一種であるので，測定器（の一部）も含めた大きな系に量子論を適用し，射影仮説を上記の R のような自由度に対して適用すれば，原理的には導けるはずのものである．つまり，**量子論の基本原理としては射影仮説を含む公理系で**

充分であり，POVM 測定などは，その公理系から導かれるものである．つまり，量子情報理論などで出てくる一見広い仮説を出発点とするのは，量子論の基本原理から出てくる帰結を実用的な使い易い形にまとめ上げた所から出発することにあたり，便利な現象論というべきものである．POVM 測定などは，便利だから大いに使って欲しいが，必要最小限の基本原理ではないことは承知しておいて欲しい．

8. 物理相互作用が限られていることから来る測定限界

図1のような一般の測定で，測定後の状態が，Q についての理想測定に近いようになるためには，S と P の相互作用 H_I が充分強く，かつ，

$$[Q, H_I] = 0 \tag{22}$$

であって欲しい.[6] しかしながら，H_I は，自然界に存在する相互作用でしかありえないので，Q の種類によっては，そのような都合の良い H_I が存在しないケースが出てくる.[10]

自然界の相互作用としては，４つしか知られていない．そして，それらは基本的にはゲージ相互作用である．つまり，形が決まっている．また，その強さも決まっていて，人間が勝手に変更できない．その結果，たとえば，ゲージ場の強さ（光子数など）を測ろうとすると，(22) は満たされない．（また，大きさも，例えば QED の場合かなり小さい.）その結果，ゲージ場の強さについては，完全な理想測定は，どうやら不可能らしい.[10]

このように，量子論の論理体系は，物理相互作用が限られていることから来る測定限界があることを強く示唆している.（注意：**これは，不確定性原理から来るよく知られた限界とは全く別のものである.**[10]）もしかすると，こういうことが，干渉項の消失などに関わっているかもしれない．また，単に干渉項の消失の問題にとどまらず，物理学の広い範囲の問題と深いところで結びついているようにも感じている．例えば，物理系を何か操作しようとする時に一番効率がいいのは，その物理系をモニターしながら，その結果を操作にフィードバックしつつ，操作することである．そのときに，モニター（即ち，測定）に原理的限界があるということは，可能な操作に原理的な限界があることを意味する．こういう原理的問題は，まだほとんど研究されていない．

9. おわりに

量子論は，その誕生以来，きわめて広範囲の問題に応用され，量子論自身も拡張されてきた．しかしながら，本稿で述べたように，量子論の原理的なところは，あいかわらず未解決のままである．そして，最後の節で述べたような，新しい原理的問いかけも生まれてきている．我々は，まだまだ量子論の真の姿を解明できてはいないのである．

参考文献

1) 量子論の論理体系については，清水明「量子論講義ノート」に解りやすくまとめた．これは，現時点では，http://as2.c.u-tokyo.ac.jp よりダウンロードできる．
2) 清水 明, 数理科学 No.11 (1993) pp. 34-38.
3) 清水 明, 科学 67 (1997) No.3, 186-193.
4) 清水 明，科学朝日 1992 年 9 月号
5) フォン・ノイマン「量子力学の数学的基礎」（邦訳は，みすず書房，1957）
6) 次の文献を読めばポイントがつかみやすいと思う：A. Shimizu and K. Fujita, *Quantum Control and Measurement*, (H. Ezawa and Y. Murayama, eds., Elsevier, 1993), p.191. (quant-ph/9804026)
7) ランダウ・リフシッツ「統計物理学」（岩波書店）
8) 例えば，L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, 1995), C. W. Gardinar, *Quantum Noise* (Springer Verlag, Heidelberg, 1991).
9) A. Shimizu, *Nanostructures and Quantum Effects* (eds. H. Sakaki and H. Noge, Springer Verlag, Heidelberg, 1994) pp. 35-47 (quant-ph/9804027); A. Shimizu, Phys. Rev. **A43**, 3819-3822 (1991).
10) A. Shimizu, *Statistical Physics* (eds. M. Tokuyama and H. E. Stanley, American Institute of Physics, 2000), 611-620. (quant-ph/9911102)

（しみずあきら，東京大学大学院総合文化研究科）