Modern Theory of Quantum Measurement and its Applications

Akira Shimizu

Department of Basic Science, University of Tokyo, Komaba
(東京大学大学院 総合文化研究科 広域科学専攻 相関基礎科学系)

http://as2.c.u-tokyo.ac.jp

References:

Modern Theory of Quantum Measurement:

- Section 4 of K. Koshino and A. Shimizu, *Quantum Zeno Effect by General Measurements*, Physics Reports **412** (2005) 191.

Its Applications:

- AS, Phys. Rev. A43, 3819-3822 (1991)
- AS and T. Miyadera, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 270403
- K. Koshino and AS, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 030401

etc.

Q. 測定理論って形而上学では？

４つある：

1. 直ぐにでも、あるいは近未来に、実験で検証できる事
2. 技術的困難から近未来には無理だが、原理的には実験で検証できる事
3. 理論の整合性の検討
4. 実験でも理論でも決して検証できない事 — 「解釈問題」「観測問題」

   ex. 多世界解釈 vs. コペンハーゲン解釈

1, 2 ：現代的な量子測定理論の対象
その正誤が、実験により厳しく判定される、自然科学の理論

3：立派な自然科学だが、4との区別が難しくなりがち
今までのところ、内部矛盾は見つかっていない

Q. 測定理論は、どういうときに必要になる？

測定は、大きく分けて2種類ある：

(a) 状態準備 $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow$ 状態準備 $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow \cdots$

ex. エネルギー準位の測定、S行列の測定

$\Rightarrow$ 誤差の有無だけの違い

(b) 状態準備 $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow \cdots$

ex. 相関の測定(time-likeな２つ以上の時空点で)、連続測定

$\Rightarrow$ 顕著な違い

例： ２つの測定器がある

- どちらも、誤差は無視できる $\rightarrow$ (a)の測定では同じ結果を出す
- (b)の測定では、どちらの測定器を使うかで、大きく結果が異なる！

(b)の測定では、測定理論を使わないと、実験と合わない！

Example – 平衡状態における電気回路のノイズ

電場: $\mathcal{E}(t)$

$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = 0$, $\langle \mathcal{E}(t)\mathcal{E}(0) \rangle = \text{FT of } S(\omega)$

- Planck, FDT by Nyquist (1928);

$$S_N(\omega) \propto \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

- FDT by Callen-Welton (1951), FDT by Kubo (1957);

$$S_{CW}(\omega) \propto \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) = S_N(\omega) + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Which is correct? Which agrees with experiment?

$$\boxed{\text{Depends on the measuring apparatus!}}$$

R. H. Koch, et al., Phys. Rev. B26 (1982) 74.

Q. コペンハーゲン解釈は実験と合わないことがある、とききましたが？

コペンハーゲン解釈の（登場時点の）曖昧な点を、

- 意地悪く捉えれば、そうなります
- 適切に捉えれば、全く実験と矛盾しない、強靱な理論になっていることがわかります

私が「コペンハーゲン解釈」と言うとき、それは後者。つまり、拙著(量子論の基礎, サイエンス社) に書いたような現代的な内容を指しています。

今日まで、実験との矛盾は何ひとつ発見されていません

Q. それでも、多世界解釈の方が優れているのでは？

多世界解釈の支持者は、射影仮説を目の敵にします。

射影仮説には２つの役割があります：

(A) 異なる測定値に対応する量子状態の間の干渉をなくす

(B) 干渉のなくなった複数の量子状態の中からどれかひとつを選び出す

よく見ると、多世界解釈もこれらと等価なことを仮定しています。

- Everet の原論文には (A) がなかったので Wigner の厳しい批判に遭った
  $\rightarrow$ 今は (A) を仮定するのが普通
- 自分自身はどれかひとつの branch のみを知覚する
  $\rightarrow$ (B) と同じ

だから、コペンハーゲン解釈を言い換えているだけです。

Q. 射影仮説は量子論の公理ですよね？

Yes, 量子論の公理のひとつです。清水明「量子論の基礎」の要請(5)

射影仮説：測定直前に $|\psi\rangle$ なる状態ベクトルを持っていた系に，物理量 $\hat{Q}$ の理想測定を行い，測定値が $\hat{Q}$ の離散固有値の中のひとつ q であったとすると，測定直後の状態ベクトル $|\psi_q\rangle$ は,

$$|\psi_q\rangle \propto \hat{\mathcal{P}}_Q(q)|\psi\rangle.$$

ただし $\hat{\mathcal{P}}_Q(q)$ は、$\hat{Q}$ の固有値 q に属する部分空間への射影演算子

- 縮退がなければ $|\psi_q\rangle = |q\rangle$
- 縮退がある場合は

$$|\psi\rangle = \sum_{q',l} \psi(q',l)|q',l\rangle \;\Rightarrow\; |\psi_q\rangle \propto \hat{\mathcal{P}}_Q(q)|\psi\rangle = \sum_{l} \psi(q,l)|q,l\rangle$$

つまり、射影演算子は「フィルター」

Q. Bornの確率規則も量子論の公理ですよね？

Yes, 量子論の公理のひとつです。清水明「量子論の基礎」の要請(3)

Bornの確率規則：状態 $|\psi\rangle$ について，物理量 Q の誤差がない測定を行ったとき，測定値は $\hat{Q}$ の固有値のどれかに限られる．測定値が $\hat{Q}$ の離散固有値のひとつ q になる確率 $P_Q(q)$ は,

$$P_Q(q) = \left\| \hat{\mathcal{P}}_Q(q)|\psi\rangle \right\|^2 .$$

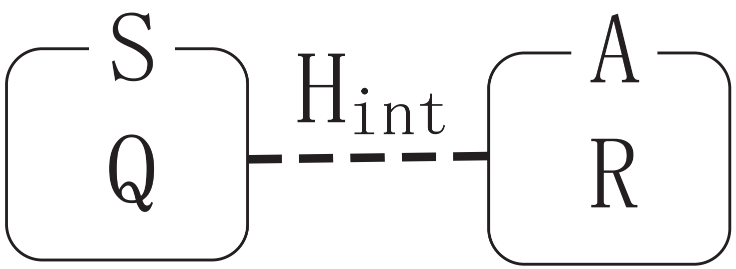
- 縮退がなければ $P_Q(q) = |\langle q|\psi\rangle|^2$
- 縮退がある場合は

$$|\psi\rangle = \sum_{q',l} \psi(q',l)|q',l\rangle \;\Rightarrow\; P_Q(q) = \sum_{l} |\psi(q,l)|^2 = \sum_{l} |\langle q,l|\psi\rangle|^2$$

量子論を認める限りは、射影仮説もBornの確率規則も、認めることになります。

Q. じゃあ、どこに「測定理論」が入り込む余地があるの？

どの系にこれらを適用するかが問題なのです。



どこに適用するかで大きな違い(R. J. Glauber, 1963)

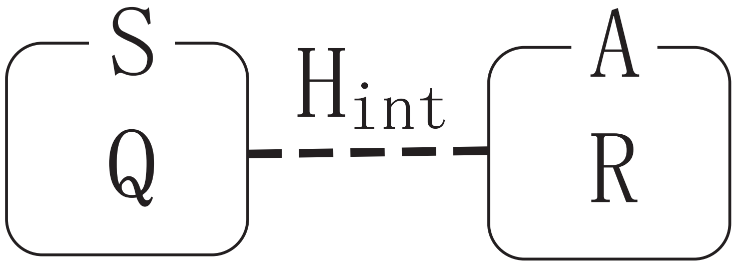
- 被測定系Sに対して適用したのでは、実験と合わない場合がある
- Sと測定器Aの合成系に対して適用すれば、実験と合う整合した理論になる
- そうすれば、測定器の誤差や測定の反作用も、きちんと計算できる

→ R. J. Glauberが現代的な量子測定理論の扉を開いた(1963)

精密実験の解析には、量子測定理論が必須になった

Q. 「合成系に適用する」ってどういうこと？

S と A の合成系をひとつの量子系として扱い「メーター変数」R を測る



1. S と A の相互作用により、合成系の状態が変わる

→ シュレディンガー方程式を合成系に適用

→ R と Q の間に相関がある状態になる

2. その状態の、Q ではなく R を、別の測定器（または観測者）で測る

→ 射影仮説を合成系の状態に適用（射影演算子は $\hat{\mathcal{P}}_Q(q)$ ではなく $\hat{\mathcal{P}}_R(r)$）

→ 測定後の状態が定まる（測定の反作用が求まる）

3. R の測定値 r から、Q の値 q を推定する

→ 有限の誤差が出る（測定誤差の大きさが求まる）

$$t = 0 \ : \ |\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle|\psi_{\mathrm{A}}\rangle = \left(\sum_{q,l} \psi(q,l)|q,l\rangle\right)\left(\sum_{m} \psi_{\mathrm{A}}(m)|r_0, m\rangle\right)$$

$\downarrow$ Interaction between S and A to establish correlation between Q and R

$$t = \tau \ : \ |\Psi(\tau)\rangle = \sum_{q,l}\left[\psi(q,l)\sum_{q',l'}\left(|q',l'\rangle \sum_{m,r',m'} \psi_{\mathrm{A}}(m) u_{q,l,m}^{q',l',r',m'} |r', m'\rangle\right)\right]$$

$\downarrow$ Ideal measurement of R to get a readout r

$$\begin{aligned} |\Psi_r(\tau)\rangle &\propto \hat{\mathcal{P}}_R(r)|\Psi(\tau)\rangle \\ &= \sum_{q,l}\left[\psi(q,l)\sum_{q',l'}\left(|q',l'\rangle \sum_{m,m'} \psi_{\mathrm{A}}(m) u_{q,l,m}^{q',l',r,m'} |r, m'\rangle\right)\right] \end{aligned}$$

This is the post-measurement state of the total system.

The post-measurement state of S is given by the reduced density operator,

$$\hat{\rho}_r = \mathrm{Tr}_{\mathrm{A}} \left(|\Psi_r(\tau)\rangle\langle\Psi_r(\tau)| \right).$$

The probability of getting a value r is

$$P_R(r) = \left\| \hat{\mathcal{P}}_R(r) |\Psi(\tau)\rangle \right\|^2 ,$$

according to Born's probability rule.

One can estimate q from r, or $P_Q(q)$ from $P_R(r)$, because Q and R are correlated.

Q. 普通の教科書にある測定は？

理想測定とか射影測定とか第１種測定と呼ばれます。

それは、ここで紹介した一般化測定の理想極限である

$$u_{q,l,m}^{q',l',r,m'} \propto \ \delta_{q',q}\, \delta_{l',l}\, \delta_{r,q}$$

となるケースです。この場合、post-measurement state は、

$$|\Psi_r(\tau)\rangle \propto \hat{\mathcal{P}}_R(r)|\Psi(\tau)\rangle = \left(\sum_l \psi(q,l)|q,l\rangle \right) |\psi'_{\mathrm{A}}\rangle$$

$$= \left(\hat{\mathcal{P}}_Q(q=r)|\psi\rangle \right) |\psi'_{\mathrm{A}}\rangle \quad (q=r)$$

となるので、被測定系Ｓの post-measurement state は、

$$\hat{\rho}_q = |\psi_q\rangle\langle\psi_q|, \quad \text{where } |\psi_q\rangle \propto \hat{\mathcal{P}}_Q(q)|\psi\rangle.$$

$\rightarrow$ 被測定系に直に射影仮説を適用したものに一致

そして、測定値rを得る確率は、

$$P_R(r) = \left\| \hat{\mathcal{P}}_R(r) |\Psi(\tau)\rangle \right\|^2 = \left\| \hat{\mathcal{P}}_Q(q) |\psi\rangle \right\|^2 \quad (q = r).$$

なので、

$$q\text{の推定値} = R\text{の読み取り値}r$$
$$P_Q(q)\text{の推定値} = \text{測定で得た}P_R(r = q)$$

とすれば、被測定系に直にBornの確率規則を適用したものに一致。

しかし、上に出てきた

$$u_{q,l,m}^{q',l',r,m'} \propto \delta_{q',q}\,\delta_{l',l}\,\delta_{r,q}$$

を実現するのは困難なので、通常の測定は実は理想測定ではなく、一般化測定です。

Q. Rの測定をいつ行うかで、結果が変わってしまうのでは？

Yes and No.

先の説明では、測定器との相互作用が終わった直後$(t = \tau)$ に測定器のメーター変数Rを読みました。

Rを$t = \tau' \ (> \tau)$に読んだ場合と比べると、Rが自発的には運動しない（安定な）場合は、

- 測定値はどちらも同じ
- $t > \tau'$におけるSの状態はどちらも同じ

Rの自発的運動がある場合も、適宜、Rの値の読みかえを行えば同様

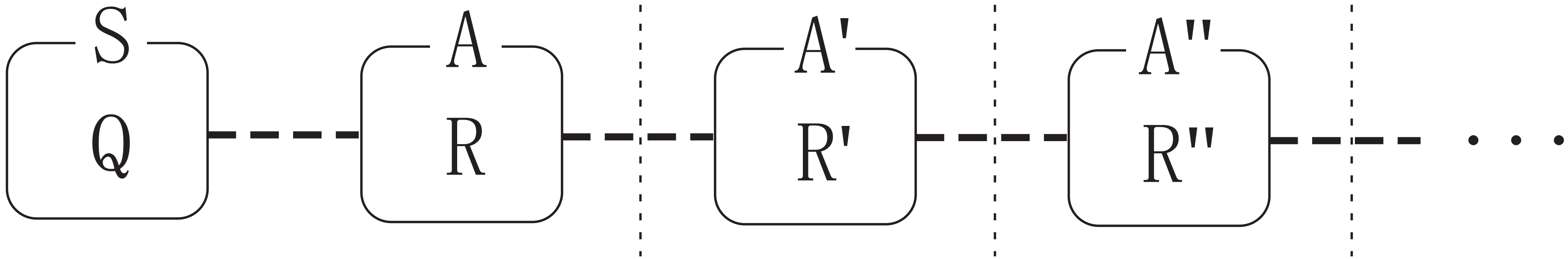
測定器との相互作用が終わった後$(t \geq \tau)$であれば、Rの測定をいつ行っても同じ。

一方、$t < \tau$においてRを測ると、結果が異なる（別の測定過程になる）

$\rightarrow$ τはこの測定のresponse time

Q. 測定器のメーターを測る測定器とは？

考えてみると、次のようになっているわけです：



A′は、別の測定器でもいいし、観測者の目でもいい。

このような構造を、von Neumann chain と呼びます。

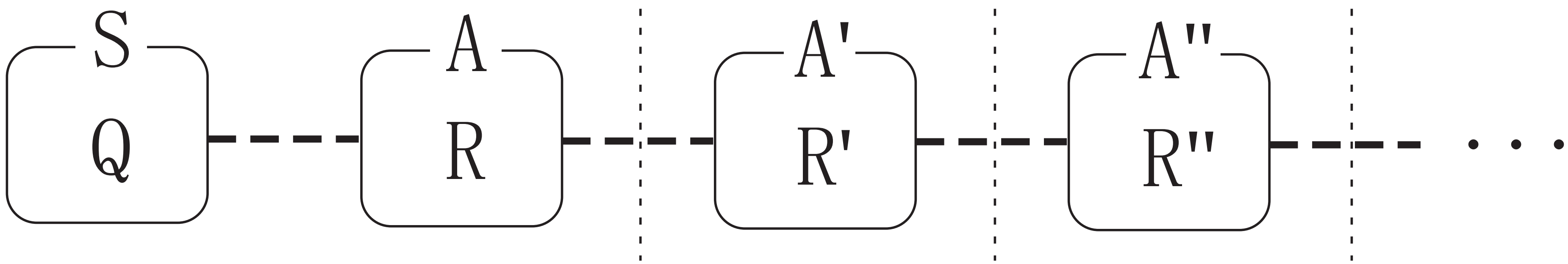
量子論を使うときには、どこかに境目 (Heisenberg cut) を設けて、

- その左側を量子系として、量子論の諸原理を適用する
- 右側は、左側に対する理想測定を行うデバイス

とするわけです。

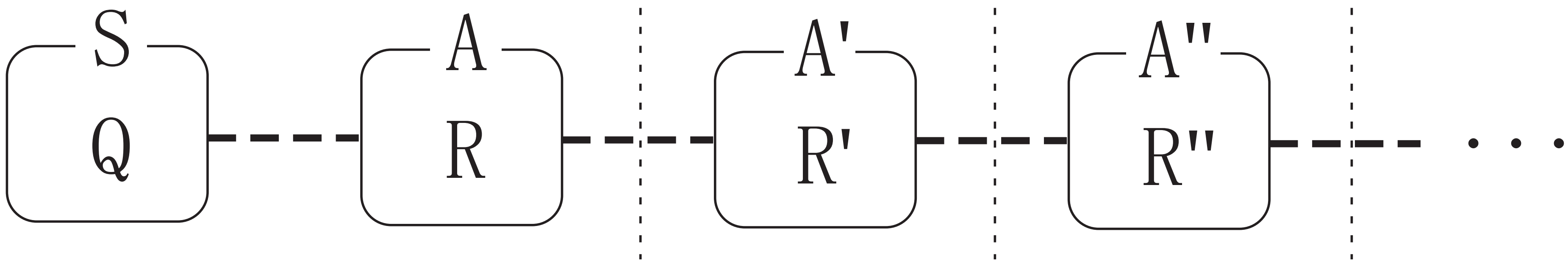
Q. Heisenberg cut の位置はどこに設けてもいいのですか？

Yes, その右側が左側に対する理想測定を行うと見なせるところであれば、どこでもいいです。



Q. でも、cut の位置を変えたら結果が違ってしまいませんか？

No, 変わりません。



von Neumann はこの性質を、psychophysical parallelism と呼びました。

結局、

ある所に Heisenberg cut を設けることができる（その右側が左側に対する理想測定を行うと見なせる）ならば、

- cut の位置を、それよりも右側に移動することはできる
- 左側に移動するのは、できるとは限らない

Q. 結局、一般化測定を扱う処方箋は？

1. Write down the von Neumann chain S, A_1, A_2, $\cdots$.
2. Find a place at which the interaction process can be regarded as the unitary part of an ideal measurement. Locate the Heisenberg cut there. Although two or more such places may be found, you can choose any of them. However, to simplify calculations, <u>it is better to choose the one that is closest to S</u>.
3. If the Heisenberg cut thus located lies between A_k and A_{k+1}, apply the laws of quantum theory to the joint system $S+A_1+\cdots A_k$, taking A_{k+1} as a device that performs an ideal measurement of the readout observable R_k of A_k. If the interaction in the joint system is effective during the time interval $0 \le t \le \tau$, one can say that the measurement is performed during this interval.
4. Evaluate the probability distribution of the readout r_k of R_k and the post-measurement state.

Q. 理想測定と一般化測定の違いは、実験結果に現れるの？

Yes, (b) のタイプの測定で、大きな違いが出ます

(a) 状態準備 $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow$ 状態準備 $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow \cdots$

ex. エネルギー準位の測定、S行列の測定

$\Rightarrow$ 誤差の有無だけの違い

(b) 状態準備 $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow$ **測定** $\rightarrow \cdots$

ex. 相関の測定 (time-like な 2 つ以上の時空点で)、連続測定

$\Rightarrow$ 顕著な違い

特に、量子性が強く、精度の高い実験では、違いが顕著になる

ex. Quantum Optics

Example – Correlation of light field

(R. J. Glauber, Phys. Rev. 130 (1963) 2529)

- 光の量子状態には様々なものがある

  number state, coherent state, squeezed state, ...

Coherent state (in the Coulomb gauge)

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t) + \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$$

A state $|\ \rangle$ is called a *coherent state* if

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\ \rangle = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r},t)|\ \rangle \quad \text{for all } \mathbf{r}.$$

Th. A classical current that is free from backaction generates a coherent state, for which $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r},t)$ is identical to a classical field generated by that current.

- 光の測定器にも様々なものがある

  吸収型, quantum counter, quntum nondemolition detector, ...

たとえば、吸収型を使うと理想測定とは全然違う：$|1\rangle \to |0\rangle$

時空点 $x_1\ (= \mathbf{r}_1, t_1), x_2, \cdots, x_n$ における、相関を測ったらどうなるか？

もちろん、測定器には誤差はないとする。

素朴には

$$\langle \hat{\mathbf{A}}(x_1)\hat{\mathbf{A}}(x_2)\cdots\hat{\mathbf{A}}(x_n)\hat{\mathbf{A}}(x_n)\cdots\hat{\mathbf{A}}(x_2)\hat{\mathbf{A}}(x_1)\rangle$$

と言いたくなるが、測定理論で分析すると、

定理： 相関を、吸収型の測定器で直接測ると、それは次の相関関数（の適当な積分）になる：

$$\langle \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(x_1)\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(x_2)\cdots\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(x_n)\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(x'_n)\cdots\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(x'_2)\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(x'_1)\rangle$$

(注：吸収型の測定器を利用して、別の型の測定器を作ることもできる)

Coherent stateでは、この相関関数は

$$\mathbf{A}^{(-)}(x_1)\mathbf{A}^{(-)}(x_2)\cdots\mathbf{A}^{(-)}(x_n)\mathbf{A}^{(+)}(x'_n)\cdots\mathbf{A}^{(+)}(x'_2)\mathbf{A}^{(+)}(x'_1)$$

になるので、

定理： Coherent stateにおける電磁場相関を、吸収型の測定器で直接測ると、全ての実験結果は古典コヒーレント光と一致する

- 他の状態は、古典コヒーレント光とは異なる結果になる
- coherent stateでも、別の型の測定器で測ると、古典コヒーレント光とは異なる結果になる

Q. 射影仮説なんか使わなくても、時間相関を計算すれば十分でしょ？

No.

既に2つの実例で示したように、X と Y の時間相関は、よく使われる、

$$\langle\psi_{\rm H}|\hat{Y}_{\rm H}(t)\hat{X}_{\rm H}(0)|\psi_{\rm H}\rangle$$

では、一般には実験と一致しません。「カノニカル相関」も同様。

ただし、測定器まで含めた合成系で、

$$\langle\psi_{\rm H}|\hat{R}^{Y}_{\rm H}(t)\hat{R}^{X}_{\rm H}(0)|\psi_{\rm H}\rangle$$

を計算して、X と Y の相関に翻訳すれば、それは正しいです。

しかし、

- 射影仮説を使った方が計算が簡単
- これが正しいことを示そうとすると、結局、射影仮説が必要

Q. あれ？「測定後の状態は混合状態だ」とききましたが？

理想測定の場合、1回の測定で測定値 r を得た直後のSの状態は

$$\hat{\rho}_q = |\psi_q\rangle\langle\psi_q| \quad (r = q)$$

ですから、純粋状態です。ただし、測定前も純粋状態で、A以外との相互作用はない場合です。

von Neumann は、多数回の測定を独立に行った結果を一緒にした、あらゆる測定値に対応する状態の混合状態

$$\hat{\rho}_{\mathrm{vN}} \equiv \sum_r P_R(r)\hat{\rho}_r$$

を考察しました。

$$\{r, \hat{\rho}_r\}_r \xrightarrow{\text{測定値の情報を捨てる}} \hat{\rho}_{\mathrm{vN}}$$

なので、議論の対象を限定すれば $\hat{\rho}_{\mathrm{vN}}$ で足りることもありますが、一般には $\{r, \hat{\rho}_r\}_r$ を考える必要があります。

Q. 測定器との相互作用は、全て「測定」ですか？

No.

物理量Qの測定とは、観測者がQについての情報Iを得る行為です：

$$I \equiv \log_2 [\text{その測定により区別できるようになる状態の数}]$$

ex. $$I = \log_2 \left[\frac{\text{その測定器で測れる}\, q \,\text{の値の範囲}}{\text{その測定器の誤差}} \right]$$

相互作用させただけでは、$I = 0$かもしれず、測定とは限りません。

もしも$I = 0$でも「測定」と呼んでしまうと、不可思議な「測定」が可能になってしまいます。（でも、よく考えると、ちっとも不思議じゃない…）

測定について不可思議な論文を見かけたら、そのあたりを注意するべし。

Q. 昔の本には「測定は瞬間的でないといけない」とありますが？

現代的な教科書では違います。response time τ は有限です。

c.f. 清水明「量子論の基礎」第３章

$\tau \to 0$ とすると、$\hat{H}_{\rm int}$ の結合定数は有限ですから、

$$\lim_{\tau \to +0} |\Psi(\tau)\rangle = \lim_{\tau \to +0} e^{-i\left(\hat{H}_{\rm S}+\hat{H}_{\rm A}+\hat{H}_{\rm int}\right)\tau} |\psi\rangle|\psi_{\rm A}\rangle = |\psi\rangle|\psi_{\rm A}\rangle$$

となり、

$$\lim_{\tau \to +0} I = 0 \quad \text{：測定ではない！}$$

だから、$\tau \to 0$ は**非**物理的な極限なのです。

ここまでのまとめ

コペンハーゲン解釈を間違って理解し、なんでもかんでも非測定系に直に射影仮説と Born の確率規則を使ってしまうと、

- 実験と合わない場合がある
- 測定器の誤差も測定の反作用も、計算できない
- 理論が内部矛盾を示すことさえある

しかし、コペンハーゲン解釈を正しく理解し、正しく使えば、

- （今まで行われた）全ての実験と合う
- 測定器の誤差や測定の反作用も、きちんと計算できる
- 整合した理論になる（古典ミンコフスキー時空の上の理論としては）

まあ、それでも気持ち悪いですが…

Thank you for attention

Q. 「POVM測定」というのをきいたことがありますが？

測定値の確率分布に着目したとき、一般化測定をPOVM (positive operator-valued measure) measurement とも呼びます。

注意： Koshino-Shimizu, Physics Reports (2005) では、状態変化を含めてPOVM measurement と呼んでいます。

小澤先生 said : 普通は、状態変化は「測定に伴うCPTP map」と呼ぶ。（清水：でも、それでは長い…ブツブツ…）。

Q. 量子論における「測定誤差」の定義は？

実は、万人が認めるような定義はありません。

古典論： 測らなくてもQは値を持っている $\rightarrow$ その「真の値」と測定値のずれが誤差

量子論： 測る前はQは定まった値を持っていない $\rightarrow$ 「真の値」がない！

そこで、目的毎に、もっともらしいと思われる定義を採用しています：

- よく使われる簡易的な定義：$(\delta r_{\mathrm{err}})^2 \equiv (\delta r_{\mathrm{sd}})^2 - (\delta r_{\mathrm{sd}}^{\mathrm{ideal}})^2$
- Ozawaの定義：$(\delta r_{\mathrm{err}})^2 \equiv \langle \Psi_{\mathrm{H}} | \left(\hat{R}_{\mathrm{H}}(\tau) - \hat{Q}_{\mathrm{H}}(0) \right)^2 | \Psi_{\mathrm{H}} \rangle$
- 他の定義のひとつ：$D(P_R \| P_R^{\mathrm{ideal}})$

測定の反作用についても同様で、目的に応じて様々な定義が使われています。

Q. 「環境理論」で射影仮説は不要になったとききましたが？

射影仮説には２つの役割があります：

(A) 異なる測定値に対応する量子状態の間の干渉をなくす

(B) 干渉のなくなった複数の量子状態の中からどれかひとつを選び出す

- (A) を decoherence と言います。
- 「環境理論」の支持者は decoherence を示せたと主張します。

しかし、実際に示しているのは「実用的には干渉がないのと等価になる」ということです。だから、(A) を示せたとは言えません。

また、

たとえ (A) が示せたとしても、(B) も必要なので、相変わらず射影仮説は必要です。