有限系におけるゲージ対称性の破れをどう理解するか？

清水明
東京大学大学院 総合文化研究科 広域科学専攻 相関基礎科学系
〒153-8902 東京都 目黒区 駒場 3-8-1
shmz@ASone.c.u-tokyo.ac.jp http://as2.c.u-tokyo.ac.jp
宮寺隆之
産業技術総合研究所

Date: 2008/03/31

概 要

ゲージ対称性が破れるような量子系では、有限体積のときの、ハミルトニアン $\hat{H}$ の最低固有値状態（基底状態）$|G\rangle$ は、マクロ物理学（熱・統計力学）から見て、きわめて異常な状態になる。即ち $|G\rangle$ は、マクロ変数である秩序変数 $\hat{O}$ の値がマクロに異なる状態たちの重ね合わせ（いわば「シュレディンガーの猫状態」）になってしまう。そのような状態はマクロ物理学とは整合しないので、（平衡状態の絶対零度極限である）真空状態にはなり得ない。つまり、正しい真空状態 $|vac\rangle$ は、$|G\rangle$ よりもエネルギーが高く、$\hat{H}$ の固有状態でもなく、保存電荷（粒子数）が異なる状態たちをうまく重ね合わせて作った状態になる。それこそが、体積無限大の極限で、通常の場の理論で「真空状態」として採用される状態になることを示す。しばしば、そのような状態は「超選択則」を破るので許されない、という主張を見かけるが、それは誤解であることも示す。また、２つの系の間に超流動が起こる状態は、その２つの系の間に「エンタングルメント」が必要だという議論もしばしば見かけるが、それもまた誤解であることを示す。一方で、$|vac\rangle$ は $\hat{H}$ の固有状態ではないために時間変化するので、一見すると、場の理論の「真空状態」に仮定される性質を満たしえないようにも見える。実際、状態ベクトルが変化する時間を計算すると、ミクロスケールの（つまり全体積 V とは無関係な）時間になっている。しかしそれも、我々が観測するのは V とは無関係な体積内の物理量だけである、という物理的要請をおくと、それらの期待値が変化する時間が $V \to \infty$ で無限大になり、解決する。こうして、有限体積における理論を、無限体積の理論やマクロ物理学ときちんと繋げることができる。

1　はじめに

対称性の破れを、『基底状態が縮退してしまうので、そのうちのひとつを真空状態と選ぶしかなく、その結果対称性が破れる』と説明している教科書は少なくない。しかしその

ような素朴な描像は、単純な強磁性体のモデルのような場合には「当たらずとも遠からず」なのだが[1]、一般には正しくない。そのことを、簡単な例で見てみよう。

V 個 ($< +\infty$) のサイトを持つ 1 次元格子上に置かれたスピンたちが、次のハミルトニアンを持つとしよう：

$$\hat{H} = -J \sum_{x=1}^{V} \hat{\sigma}_Z(x)\hat{\sigma}_Z(x+1) - h \sum_{x=1}^{V} \hat{\sigma}_X(x) \qquad (J > 0, h > 0) \tag{1}$$

横磁場 h がある一定値以下では、この系 (transverse Ising model) の厳密な基底状態は、

$$|G\rangle \propto |\uparrow\uparrow\uparrow \cdots\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow \cdots\rangle + [\text{small terms}] \tag{2}$$

となる。これは縮退していない唯一の基底状態であり、$\hat{H}$ の全ての対称性を有していて、本質的にいわゆる「シュレディンガーの猫状態」（マクロに異なる状態たちの重ね合わせ）

$$|cat\rangle \equiv \frac{|\uparrow\uparrow\uparrow \cdots\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow \cdots\rangle}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

である。従って $|G\rangle$ は、マクロ物理学（熱・統計力学）と整合せず、平衡状態の絶対零度極限である「真空状態」$|vac\rangle$ ではあり得ない。（基底状態は縮退していないし、真空状態は基底状態ではない！）正しい真空状態はもちろん、強磁性状態

$$|vac\rangle \simeq |\uparrow\uparrow\uparrow \cdots\rangle \text{ or } |\downarrow\downarrow\downarrow \cdots\rangle \tag{4}$$

である。これを特徴付ける秩序変数 $\hat{\mathcal{O}}$ は、全磁化（の Z 成分）

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{M}_Z \equiv \sum_x \hat{\sigma}_Z(x) \tag{5}$$

であるが、これは $\hat{H}$ と交換しない。そのため、$\hat{H}$ の固有状態である $|G\rangle$ は、$\hat{\mathcal{O}}$ の固有状態ではなくなり、縮退せず、$\hat{\mathcal{O}}$ の値がマクロに異なる状態たちの重ね合わせという異常な状態になったのである。

この簡単な例で分かるように、一般に、ハミルトニアン $\hat{H}$ と秩序変数 $\hat{\mathcal{O}}$ が交換しないような量子系では、厳密な基底状態 $|G\rangle$ は、$\hat{\mathcal{O}}$ の固有状態ではない。しかも $|G\rangle$ は、縮退せず、マクロ変数である $\hat{\mathcal{O}}$ の値がマクロに異なる状態たちの重ね合わせになっていることが多い。そのような異常な状態はマクロ物理学とは整合しないので、（平衡状態の絶対零度極限である）真空状態 $|vac\rangle$ にはなり得ない。通常の場の理論で「真空状態」として採用される状態は、$|vac\rangle$ の方の無限体積極限である。

ゲージ対称性が破れる系も、まさにこのようなケースに相当する。すなわち、ゲージ不変なハミルトニアン $\hat{H}$ が秩序変数 $\hat{\mathcal{O}}$ と交換しないために、厳密な基底状態 $|G\rangle$ は、マクロ物理学とは整合しない異常な状態になる。正しい真空状態 $|vac\rangle$ は、$|G\rangle$ よりもエネルギーが高く、$\hat{H}$ の固有状態でもなく、保存電荷（粒子数）が異なる状態たちをうまく重ね合わせて作った状態である。

[1] それでも混乱はしばしば見受けるが、本稿では触れない。混乱の一部を解消するには、[1] がお役にたつと思う。

ゲージ対称性が破れる系では、これに加えて数々の非自明な点があり、大いに混乱を招いているように見える。例えば、$|vac\rangle$ のような状態は「超選択則」を破るので許されないと主張されたり、２つの系の間に超流動が起こる状態は、その２つの系の間に「エンタングルメント」が必要だと主張されたりする。それらは誤解であることも示す。

また、上記の transverse Ising model の場合には、$|vac\rangle$ と $|G\rangle$ のエネルギー差 ΔE は V を増すとともに指数関数的に小さくなるのだが、ゲージ対称性が破れる系では、ΔE は V を大きくしても減らない $O(1)$ の量になる。そのために、さらなる問題点が生ずる。それは、$|vac\rangle$ が（$\hat{H}$ の固有状態ではないために）時間変化してしまうことである。これは一見すると、場の理論の「真空状態」に仮定される性質と矛盾しているようにも見える。この問題の解決策も示す。

本稿のような議論をして初めて、有限体積における量子論が、無限体積の量子論やマクロ物理学ときちんと繋がるのである。

2　よく見かける議論とその問題点

電荷（粒子数）に関する超選択則 (superselection rule) を、次のような、素朴だが紛らわしい形式で表現しているのを、しばしば見かける：

- 電荷の異なる状態の**重ね合わせは存在しない**
- 電荷の異なる状態を**重ね合わてはいけない**

講演で示したように（詳しくは [2]）、これはあまり正確な表現ではないのだが、これをそのまま受け止めて、次のような議論をするのを、しばしば見かける：Bose-Einstein condensate (BEC) や Superconductor では、

1. **秩序変数** $\hat{\mathcal{O}}$ は、ゲージ不変でない：
   - BEC: $\hat{\mathcal{O}}(x) = \hat{\phi}(x)$
   - Superconductor： $\hat{\mathcal{O}}(x) = \hat{\psi}_\uparrow(x)\hat{\psi}_\downarrow(x)$
2. superselection rule により、N の定まった状態しか許されない.
3. ゆえに $\langle\hat{\mathcal{O}}(x)\rangle = 0$ であり、*spontaneous symmetry breaking* はない.
4. しかし、*Long-range order* はある：
$$\langle\hat{\mathcal{O}}^\dagger(x)\hat{\mathcal{O}}(y)\rangle \not\to 0 \text{ as } |x-y| \to \infty \quad \text{spatially.}$$
5. Definite *relative phase* only when S_1 and S_2 are *entangled.*
6. ゆえに、$\langle\hat{\mathcal{O}}(x)\rangle \neq 0$ や *coherent state* を仮定した議論は正しくない.

これらのうち、1 と 4 は正しいが、2 は超選択則に関する不正確な記述をそのまま採用してしまっている。3, 5, 6 も、その 2 を根拠に導かれたものなので、疑う必要がある。（実際、講演で示したように、これらは正しくない。）

また、熱力学では、孤立有限系の平衡状態も、表面を通して外界と相互作用する有限系の平衡状態も、（ひとたび平衡状態に達すれば）同じ状態になる、と仮定されている。そしてその仮定は、経験上、正しい。この経験事実（の絶対零度極限）から、量子論においても、孤立有限系の基底状態が、そのまま、外界と弱く相互作用する有限系においても安定な状態だと考えたくなる。しかし、1 節で見たように、それは一般には成り立たない。両者が異なる場合には、経験事実や熱力学と整合するのは後者である。つまり、**マクロ系の状態を量子論で決定しようとするときは、孤立系だけ考えてその基底状態を取り出せばよいとわけではなく、macroscopic (thermodynamical) stability がある状態を採りだす必要がある**のだ。その観点からも、上記の議論は素朴すぎる。（実際、講演で示したように、ゲージ対称性の破れの場合には、孤立系の厳密基底状態はそのような安定性がなく、正しい真空状態ではない。）

3　結果

以上のことを詳細に分析した結果、我々は、「概要」に記した結論を得た。

本稿では、詳しい内容を書く（時間的）余裕がありませんでしたが、問題意識と大略はつかんでいただけたと思います。詳しい内容は、いずれ論文を書く予定ですが、以下の [3]-[7] の論文（それぞれ、異なる問題が主題です）に書いた内容の一部をつなぎ合わせて論理を展開しているので、各部分・部分は、これらの論文に書いてあります。本来は、[8] が詳しい論文になるはずだったのですが、イントロなどが、原子物理学分野の研究者に妥協した遠回しな書き方になってしまっているので、全面的に書き換える予定です。lazy で申し訳ありません。

[1] 清水明「熱力学の基礎」（東大出版会, 2007 年 3 月）12, 15, 16 章.
[2] 清水明「新版 量子論の基礎」（サイエンス社, 2004) p.68.
[3] A. Shimizu and T. Miyadera, PRL 89 (2002) 270403.
[4] A. Shimizu and J. Inoue, PRA 60 (1999) 3204.
[5] A. Shimizu and T. Miyadera, PRL 85 (2000) 688.
[6] A. Shimizu and T. Miyadera, PRE 64 (2001) 056121).
[7] A. Shimizu and T. Miyadera, J. Phys. Soc. Jpn. 71 (2002) 56.
[8] A. Shimizu and T. Miyadera, cond-mat/0102429.