

7.10 補足：量子論による「EPRパラドックス」の解決

この補足は、量子論を [6] のレベルできちんと理解している人のために、EPR の思考実験は何の矛盾も生じないことを説明するものです。これにより、EPR 論文の主張のどこに問題があったのかも判ると思います。

ポイントはいくつかありますが、大事なことは、物理は自然現象を扱うのだから、観測データが理論の審判であることです。理論が一見すると不思議に見えても、次の2点が満たされれば、何の矛盾もないのです：

1. どの観測者にとっても、それぞれが得る観測データが、因果律などのあらゆることに関して矛盾が生じないこと。
2. 複数の観測者が、観測データを見せあっても、やはり因果律などのあらゆることに関して矛盾が生じないこと。

また、次のことも大事です：

3. 量子論の予言の内容は、同じ状態を用意しては測るということを繰り返したとき（あるいはたくさんの同等な系を同じ状態に用意して独立に測定を行ったとき）の確率分布だけである²⁰。

これらの事さえしっかり押さえておけば、EPRに限らず、様々な「パラドックス」と言われることや疑問は、ほとんど氷解します。ここでは「EPRパラドックス」だけを説明しましょう。

空間的に遠く離れた2地点A,Bにそれぞれ観測者 O_A, O_B がいて、それぞれが独立に、時刻 t_A, t_B において実験を行うとします。それぞれの実験に要する時間は短くて、実験が行われる2つの時空領域は、相対論的な意味で「空間的」とします。即ち、因果関係がないとします。そうすると、実験に要する時間をゼロにしても議論に変わりがないので、以下そのように仮定します。そして、観測の前後における状態変化を追いたないので、系の時間発展を状態ベクトルの時間変化に負わせる、いわゆる「シュレディンガー描像」（座標表示という意味の「シュレディンガー表示」ではない）を採用します。そして、観測していなくても状態ベクトルが自然に時間変化する効果（シュレディンガー方程式によるユニタリー発展）は、簡単のため省きます。入れても解析がややこしくなるだけで、主要な結論は変わらないからです。

地点Aの観測者 O_A が測る物理量を A_θ 、地点Bの観測者 O_B が測る物理量を B_ϕ とします。ただし、 θ, ϕ は、測定に際してそれぞれの観測者が勝手に選べる測定器のパラメータです。たとえば、 $\theta = 0$ と設定すると粒子の位置が測れ、 $\theta = 1$ と設定すると粒子の運動量が測れる、などです。 A_θ, B_ϕ を表す演算子を $\hat{A}_\theta, \hat{B}_\phi$ 、それぞれの、固有値 a_θ, b_ϕ に属する固

²⁰たとえば、期待値は確率分布から計算できる量だし、エネルギースペクトルは、様々な状態についてエネルギーの測定値の確率分布を考えたときに、いずれかの状態について確率が有限になりうるエネルギーの値の集合である。

有空間への射影演算子を $\hat{P}_{A_\theta}(a_\theta), \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi)$ と書くことにします。 $\hat{A}_\theta, \hat{B}_\phi$ は離れた地点の物理量を表す演算子なので、交換します²¹。従って、 $\hat{P}_{A_\theta}(a_\theta), \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi)$ も交換します [6]。

一連のできごとを記述するための慣性系として、 O_A が静止している慣性系を採ることにします。この慣性系で $t_A < t_B$ (しかし空間的) であるとすると、以上の仮定の下での状態ベクトルの時間発展は次のように計算されます。まず、測定前の全系の状態ベクトルを

$$|\psi\rangle \quad (7.10.11)$$

とします。時刻 t_A に O_A が A_θ を測って測定値 a_θ を得る確率 $P_{A_\theta}(a_\theta)$ は、

$$P_{A_\theta}(a_\theta) = \|\hat{P}_{A_\theta}(a_\theta)|\psi\rangle\|^2 \quad (7.10.12)$$

で、測定直後の状態ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{P_{A_\theta}(a_\theta)}} \hat{P}_{A_\theta}(a_\theta)|\psi\rangle. \quad (7.10.13)$$

この状態について (つまり、 O_A が測定値 a_θ を得たという条件のもとで) 時刻 t_B に O_B が B_ϕ を測って測定値 b_ϕ を得る確率 $P_{B_\phi}(b_\phi; a_\theta)$ は、

$$P_{B_\phi}(b_\phi; a_\theta) = \left\| \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi) \frac{1}{\sqrt{P_{A_\theta}(a_\theta)}} \hat{P}_{A_\theta}(a_\theta)|\psi\rangle \right\|^2. \quad (7.10.14)$$

この測定の直後の状態ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{P_{B_\phi}(b_\phi; a_\theta)P_{A_\theta}(a_\theta)}} \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi)\hat{P}_{A_\theta}(a_\theta)|\psi\rangle. \quad (7.10.15)$$

ところで、この測定を行った時刻 t_B には、 O_B は O_A が得た測定値 a_θ を知るすべはないので、(多数の実験を繰り返した後に) 彼が実際に得る確率分布のデータは、知らない値 a_θ について平均された

$$\sum_{a_\theta} P_{B_\phi}(b_\phi; a_\theta)P_{A_\theta}(a_\theta) = \sum_{a_\theta} \left\| \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi)\hat{P}_{A_\theta}(a_\theta)|\psi\rangle \right\|^2 \quad (7.10.16)$$

です。 $\hat{P}_{A_\theta}(a_\theta), \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi)$ が交換することと、射影演算子の性質を使うと、これは、 O_A が測定を行わなかったときに O_B が得る確率分布

$$P_{B_\phi}(b_\phi) = \left\| \hat{P}_{B_\phi}(b_\phi)|\psi\rangle \right\|^2 \quad (7.10.17)$$

に等しいことが容易に示せます。従って、 O_A が測定をしようがしまいが、また、パラメータ θ をどんな値に設定して測定しようが、 O_B が得る確率分布は全く変わらないのです。

²¹このことを一番すっきりと見るためには、 $\hat{A}_\theta, \hat{B}_\phi$ を場の理論で書いてみればよいでしょう。そうすれば、 $\hat{A}_\theta, \hat{B}_\phi$ のような、異なる地点の物理量を表す演算子は (シュレディンガー描像では) 交換することが直ちに言えます。なお、場の理論はハイゼンベルグ描像でやらないと気が済まない人もいますが、そういう人は、「交換関係」を「同時刻交換関係」あるいは「空間的な時空点の間の演算子の交換関係」と読み替えてください。

こうして、因果律は完全に守られていることが判ります。 O_A がなした測定により、またどんな測定値を得たかに応じて、状態ベクトルは (7.10.13) のように変化するのですが、それによって因果律が破られることは決してないのです。特に、 O_A は自分が測定値を得たとたんに O_B がこれから得る測定値を知るのですが、それは因果律を破らないのです。上記のように、 O_B が得る測定値の確率分布は何も変わらないので、どんな情報も伝える事ができないからです。(これについては、[6] の 8.3 節の説明が判りやすいでしょう)。

この『状態は変わるけど情報は伝わらない』というのは、古典確率論で測定後に確率分布を事後確率に変更するときと同様ですから、『...』内の文だけを問題にするのであれば、何ら不思議な点はありません。しかし、それで考察を止めてしまってはいけません。文章だけのレベルで物理を議論しては、中身は見えてこないのです。そこで、きちんと中身を見るために式 (7.10.13) に注目すると、量子論における状態変化の仕方は、古典確率論で事後確率に変更するのとは違って、状態ベクトルに射影演算子がかかるような変化になっています。実は、このことが量子論と古典論(実在論)に決定的な違いをもたらすのです。そのことを明らかにしたのがベルの仕事なのです。

また、 $t_A > t_B$ になるような慣性系で以上のことを記述すると、先に O_B が測定を行うこととなりますが、その場合でも、上と同様の計算を行えば、両者の得る確率分布は上の場合とまったく同じ (7.10.12), (7.10.17) になることも判ります。 t_A, t_B の間の時刻における状態ベクトルはどちらの慣性系で記述するかで変わりますが、測定値の確率分布が変わらないのだから、どちらも同じ状態です。上記の 3 と、7.6 節の「同じ状態」「異なる状態」の定義を思い出してください。このように、巷間しばしば言われていることとは違って、射影仮説はローレンツ不変性を崩しません。

以上のことを EPR の思考実験 に当てはめると、粒子 1 を測る観測者を O_A 、物理量を x_1 または p_1 、粒子 2 を測る観測者を O_B 、物理量を x_2 または p_2 として、次のようになります。 O_A から見ると、自分が p_1 を測って測定値 p_* を得たとたんに、 O_B がこれから得るであろう p_2 の測定値が $-p_*$ になることを知るのですが、これは因果律を破りません。 O_A が為した測定により状態ベクトルは変わるのですが、 O_B は、どんな測定をしても、その変化を検知できないからです。従って、アインシュタイン達が p_2 が「実在する」ための十分条件としてあげた、『粒子 2 (の状態) を乱すことなしに、 p_2 の値を確実に予言することが可能である』という条件の中の下線部は、 O_B が検知できるような変化は起こらないという意味では満たされていますが、粒子 1, 2 の合成系の状態は確かに変化しているという意味では破られているのです。Bohr が指摘したように、アインシュタイン達の「物理的実在の規準」は、このように本質なあいまいさを含んでいるのです。

このあいまいさを解消して議論を先に進めるためには、ひとつひとつの言葉の意味をきちんと定義しながら、もっと詳しい分析をする必要があります。そのような分析の模範的な例が、ベルの仕事なのです。具体的には、彼は実在論を数学的にきちんと定式化した上で、次のような思考実験を考えました。 O_A, O_B がその後どこかで落ち会って、お互いのデータをつきあわせてみることを考えます。そうすれば、自分のデータと相手のデータの関係(相関)を調べることができます。そうすると、EPR の思考実験の場合、相手の得たデータと自分のデータが強く関係していることが判ります。(もちろんこれも因果律を破りません。彼らは今や同じ場所に会しているのだから、データの間関係を見いだしても、何

ら因果律には反さないからです。)このときにどのくらい強い相関が得られるかを分析してみると、量子論では、量子論特有の「干渉効果」のために、どんな実在論でも得られないような強い相関を示すことがあることを、ベルは見いだしたのです [6]。

実際に実験を行うと、結果は量子論に一致しました。従って、量子論はこのような微妙なきわどい状況でも正しい予言を与えるような強力で頑丈な理論だった、ということが判ったのです。

この節の議論を自分で考えながら追った人は、アインシュタインが提起した問題を分析すると量子論に対する理解が一気に深まることの実感できたと思います。

参考文献

以下の文献のうち、[1], [3], [4], [7] は、次の本に収められている：J. A. Wheeler and W. H. Zurek eds., *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University Press, 1983).

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Physical Review* 47 (1935) 777.

[2] マックス・ヤンマー (井上健訳)「量子力学の哲学」(紀伊國屋書店)。この本は、歴史的な知識に乏しい筆者がこの文章を書くのに、たいへん大きな助けになった。

[3] N. Bohr, *Physical Review* 48 (1935) 696.

[4] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* 23 (1935) 807, 823, 844.

[5] 量子情報理論で安心して薦められる教科書は、たとえば、M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[6] 量子論の根本的な考え方や、それに対比して古典論の根本的な考え方を、きちんと解説してある教科書はとても少ないのが現状である。そこで、手前味噌のようで申し訳ないが、拙著「新版 量子論の基礎～その本質のやさしい理解のために」(サイエンス社, 2004)をあげておく。

[7] J. S. Bell, *Physics* 1 (1964) 195.