問題 1.6 （この節の内容を一般的に理解するために有益！）x, y の関数 $Z = Z(x, y)$ を，他の変数 ξ, η の関数として表した関数 $Z = Z(\xi, \eta)$ の偏微分係数を考える．

(i)♠ 次の公式を証明せよ．ヒント：x, y と ξ, η にも関数関係があることになるから，$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ と考えて，問題 1.7 と同様にすればよい．

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)_\eta = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_\eta + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_\eta, \tag{1.20}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_\xi = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_\xi + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_\xi. \tag{1.21}$$

(ii) 上記の公式を,「η を固定して ξ を変化させたとき，$Z(x, y)$ の x, y が変化する割合は…」という具合に解釈して納得せよ．

(iii) 上記の公式を (1.15) に適用して，(1.18) が導かれることを確認せよ．

(iv) 上記の公式を n 変数関数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合に拡張せよ．

問題 1.7 ある量 Z が，変数 x, y の関数としては，連続的微分可能な 2 変数関数 $Z = Z(x, y)$ で与えられているとする．このような Z について，x, y を，別の変数 t の関数 $x(t), y(t)$ としていっせいに変化させた場合を考える.（これは，問題 1.6 の特殊なケースと見なすこともできる.）ただし，$x(t), y(t)$ は t について微分可能とする．

(i) この場合，Z は変数 t の関数としては 1 変数関数となる：$Z(t) = Z(x(t), y(t))$．その微分が次式で与えられることを示せ．ヒント：(1.13) を dt で割算して $dt \to 0$ の極限をとるとよい．

$$\frac{dZ}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y \frac{dx(t)}{dt} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x \frac{dy(t)}{dt} \tag{1.22}$$

(ii) $Z = x^2 e^y, x = t^3, y = t^4$ のケースについて，上式の左辺と右辺を別々に計算し，たしかに上式が成り立っていることを確認せよ．

問題 2.1 関数 $f(x,y)$ に $U^{(1)}, U^{(2)}$ を代入した，$Z = f(U^{(1)}, U^{(2)})$ について，C_0 のもとでの，つまり，$U = U^{(1)} + U^{(2)}$ が一定の下での偏微分 $\left(\dfrac{\partial}{\partial U^{(1)}} Z\right)_U$ を，(1.22) を用いて $f_x(U^{(1)}, U^{(2)}), f_y(U^{(1)}, U^{(2)})$ で表せ.