§ Typicality からわかること

← almost all state $|\psi_{shell}\rangle$ in the energy shell $\mathcal{E}$ is an eq. state.

1. Almost all mixture of $|\psi_{shell}\rangle$'s is also the same eq. state.

- Maximal mixture in the shell ← equal weight.

$$\overline{|\psi_{shell}\rangle\langle\psi_{shell}|} = \hat{\rho}^{ens}_{E} \quad \text{: microcanonical ensemble}$$

☺ $|\psi_{shell}\rangle = \sum_{n}' C_n |n\rangle$ ← energy eigenstate について より.

$$\overline{|\ \rangle\langle\ |} = \sum_{n,m}' \overline{C_n^* C_m} |n\rangle\langle m|$$

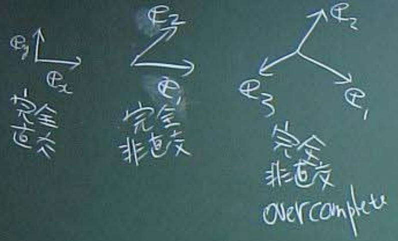
$$= \frac{1}{W}\sum_{n}' |n\rangle\langle n| = \hat{\rho}^{ens}_{E}$$

- Weighted mixture such that energy has a sharp distribution.

ex) Canonical Gibbs state $e^{-\beta\hat{H}}/Z$

・他にも様々な平衡アンサンブルが作れる。

2. $\{|\psi_{shell}^{\nu}\rangle\}$ は $\mathcal{E}$ の完全系 (nonorthogonal, overcomplete)



$$\overline{|\psi_{shell}\rangle\langle\psi_{shell}|} = \sum_{n,m}{}' \overline{c_n^* c_m}\, |n\rangle\langle m|$$

$$= \frac{1}{W} \boxed{\sum_n{}' |n\rangle\langle n|} = \hat{1}_{\mathcal{E}} \leftarrow \mathcal{E}\text{の中での}1$$

$\forall |\varphi\rangle \in \mathcal{E}$,

$$= \lim_{\mathfrak{N}\to\infty} \frac{1}{\mathfrak{N}} \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{N}} |\psi_{shell}^{\nu}\rangle\langle\psi_{shell}^{\nu}| = あ_{\mathfrak{N}}$$

ふくそすー

$$|\varphi\rangle = \hat{1}_{\mathcal{E}} |\varphi\rangle \quad \text{hermite}$$

$$= \lim_{\mathfrak{N}\to\infty} \frac{W}{\mathfrak{N}} \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{N}} |\psi_{shell}^{\nu}\rangle \langle\psi_{shell}^{\nu}|\varphi\rangle$$

$\forall |\varphi\rangle \in \mathcal{E}$, ~~十分大きな$\mathfrak{N}$で~~

$$\langle\varphi| あ_{\mathfrak{N}} |\varphi\rangle \xrightarrow[\text{TDL}]{P} \langle\varphi|\varphi\rangle$$

(レポート!)

$\mathfrak{N}$ はTDLといっしょにうまく大きくする

$$\hat{A} = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|, \quad \langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$$

もし $\forall|\varphi\rangle$, $|\varphi\rangle = |n\rangle$ とし $a_n = \langle n|n\rangle = 1$, $\hat{A} = \sum_n |n\rangle\langle n|$

3. almost all superposition of $\{|\psi_{shell}^{\nu}\rangle\}$ is also the same eq. state. (証明してない)

(レポート on 証明)

けど、ちゃんと直交させれば自明

ここへのproj. $\hat{P}(E-\Delta E, E)$ energy

$$\sum_\nu \xi_\nu |\psi_{shell}^{\nu}\rangle = \hat{P}(E-\Delta E, E) \sum_\nu \xi_\nu |\psi_{shell}^{\nu}\rangle$$

• ゆえに「weak ETH」が言えそう。 (eigenstate thermalization hypothesis)

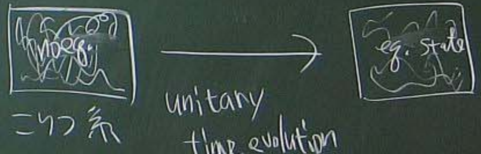
「almost all energy eigenstate is an eq. state」

(レポート on 論文)

ほとんど自明な気はしますが…。

これを「all」に強めると、thermalization (熱平衡化) が

量子こりつ系で起こる!



ただし、これは十分条件であり、必要条件ではない。
つまり、強すぎる。また、weak ETHでは弱すぎる。

Ch. Thermal Pure Quantum (TPQ) 形式

PRL 108 (2012) 240401
〃 111 (2013) 010401
PRB 90 (2014) 121110(R)
かいせつ：物理学会誌 70 (2015) 368
S. Sho, Springer thesis

§ Typicality だけでは(統)の定式化には不足

$|\psi_{shell}\rangle$ が一本与えられたとき

- mechanical variables の値は求まる.
- genuine TD variables は求められない!

$\because\ S_{VN}(\hat{\rho}_{ens}) = S_{TD}$

$S_{VN}(|\psi_{shell}\rangle\langle\psi_{shell}|) = 0$

→ 基本関係式が求まらない!

→ $S, T, \mu, F, G, \cdots$ が求められない!

$S_{VN}(\hat{\rho})$ Von Neumann entropy

$= -\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$

$\hat{\rho} = \sum_n w_n |n\rangle\langle n|$ ← $0 \le w_n \le 1$

$= -\sum_n w_n \ln w_n$

Shannon entropy

- 独立変数をとりかえられるのか?

E, V, N → B, V, N

$|\psi_{shell}\rangle$: E, V, N → ?

(特に一次相転移が起こる系では原理的な問題になる)

- practical でない.

数値計算で $|\psi_{shell}\rangle$ を作るのはしんどい!

これらの不満を解消 ⇒ TPQ形式

- genuine TD variables も, 1ケの TPQ state から求まる.
- 独立変数も自由にかえられる
- practical には.

— 対角化より much better

— どんな $\hat{H}$ でもo.k. ↔ QMC DMRG MPS

何次元系でもOK

— 結果の正しさがげんみつに保証されてる. (しい性がない!)

— 系のサイズ ≤ [dim $\mathcal{H}$ のベクトルを2本収納できる]

— 並列化が容易

- プログラミングが超簡単
- 物性研のHΦにも入ってる

∵ 「TPQは、どんな問題も、ちょっとだけ苦手」

- 他の手法が苦手な問題については勝てる
- 他の手法のチェックにも使える。

§ Setup

N : # of sites, particles, spins, … etc.

V : 体積

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間

$\hat{H}$: Hamiltonian

- eq. is specified by $E, V, N, M, \ldots$

  → E, V, N と略す。

- Order symbols

  - $O(N^k)$

    ex. $N+1 = O(N) = O(N^2)$

  - $\Theta(N^k)$

    $f(N) = \Theta(N^k)$

    $\Longleftrightarrow \dfrac{f(N)}{N^k} \to$ 正定数

    ex. $N+1 = \Theta(N) \neq \Theta(N^2)$

仮定：

ensemble 形式が正しい結果を与える。

↑

TDと整合

ex. $S \sim \ln W \sim \ln[\Omega(E)\Delta E]$

↑ Sには効かない。

→ $\Omega(E) = e^{S(E) + o(N)}$

$= e^{N s(u) + o(N)}$

u ← E/N

上に凸、C^1級

§ TPQ states

eg. stateを表す pure state を一般的に定義する

Def. $|\psi\rangle$ $(\in \mathcal{H})$, which has a classical random variable(s), is called a thermal pure quantum (TPQ) state if

$$\langle \hat{A} \rangle_N^{\psi} \equiv \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \xrightarrow{P} \langle \hat{A} \rangle_N^{\mathrm{ens}} \equiv \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{ens}} \hat{A}\right]$$

for $\forall$ mechanical variable $\hat{A}$ uniformly as $N \to \infty$.

That is, for $\forall \varepsilon > 0$ there exists a function $\eta_\varepsilon(N)$ that vanishes as $N \to \infty$ and

$$P\left(\left| \langle \hat{A} \rangle_N^{\psi} - \langle \hat{A} \rangle_N^{\mathrm{ens}} \right| \geq \varepsilon\right) \leq \eta_\varepsilon(N)$$

for $\forall$ m.v. $\hat{A}$.

ex. $|\psi_{\mathrm{shell}}\rangle \in \mathcal{E}$ も TPQ state のひとつ.

これからやること:

- 別のTPQ stateを作る (mTPQ, cTPQ, gTPQ, ...)
- それらから、genuine TD variablesを求める公式をつくる.
- 様々なTPQを相互に関係づける公式も作る

§ microcanonical TPQ (mTPQ) state

略記: $E, V, N, M, \dots \to E, V, N \to E, N$

仮定: $\dim \mathcal{H} < +\infty$ (for $N < +\infty$) としておく.

ex. スピン系 $\dim \mathcal{H} = 2^N$, Hubbard $\dim \mathcal{H} = 4^N$

注 PRL 2012 とは, きかく化や S の公式を update した分異なる!

Take an arbitrary basis $\{|\nu\rangle\}$ of $\mathcal{H}$.

Take a random vector in $\mathcal{H}$,

$$|0\rangle \equiv \sum_\nu z_\nu |\nu\rangle, \quad z_\nu = \frac{x_\nu + i y_\nu}{\sqrt{2}}, \quad x_\nu, y_\nu \in \mathbb{R} : \text{standard normal distribution} \ (\overline{x_\nu} = 0, \ \overline{x_\nu^2} = 1 \ \text{etc.})$$

.... unnormalized!

Let $\hat{h} \equiv \hat{A}/N$, $\hat{h}|n\rangle = e_n |n\rangle$

Take an arbitrary number ℓ s.t.

$\ell \geq e_{max} \; (= \max\{e_n\})$

・若干の注意の元で
もっと小さく選んでも可。
・実際の計算では、
途中で値を変えたりする。

Define

$$|k\rangle \equiv (\ell - \hat{h})^k |0\rangle .$$

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$

これから示す:

① $|k\rangle$ は TPQ state のひとつ for $\forall k$

"mTPQ state" ← bad naming!

② $|k\rangle$ から、s や T が求まる!

1TQ

§ ①を示す。

まずは、ラフに見通しを付けよう。

エネルギー密度 $u \equiv E/N$ は、

$|k\rangle$ で、どうなってるか?

$$\hat{h} = \sum_n e_n |n\rangle\langle n|$$

$$|0\rangle = \sum_n z_n |n\rangle$$

$$|k\rangle = \sum_n z_n (\ell - e_n)^k |n\rangle$$

ゆえに、

distr. function of u:

$$r_k(u) \equiv \frac{1}{\delta} \sum_n{}'' |z_n|^2 (\ell - e_n)^{2k}$$

キカクイヒしてない: $u - \frac{\delta}{2} \leq e_n < u + \frac{\delta}{2}$

後でちゃんとやる

$$\simeq \frac{1}{\delta} \sum_n{}'' \overline{|z_n|^2} (\ell - e_n)^{2k}$$

$$\overline{|z_n|^2} = \frac{1}{2}\left(\overline{x_n^2} + \overline{y_n^2}\right) = 1$$

$$= \frac{1}{\delta} \sum_n{}'' (\ell - e_n)^{2k}$$

$$= g(u) (\ell - u)^{2k}, \qquad g(u) = e^{N s(u) + o(N)}$$

とりあえずする。

← many-body DOS.

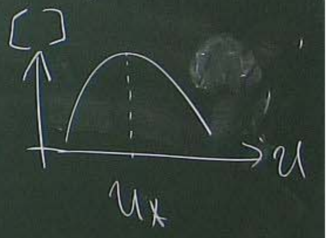
$$= (\ell - u)^{2k} e^{N s(u)}$$

$$= \exp\left(N\left[s(u) + \frac{2k}{N} \ln(\ell - u)\right]\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}[\;] = \beta(u) - \frac{2k}{N} \cdot \frac{1}{\ell - u}$$

→ $u = u_*$ で $[\;]$ は peak s.t.

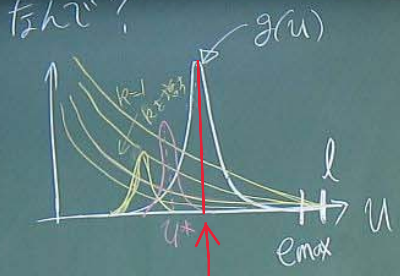
$$\beta(u_*) = \frac{2k}{N} \frac{1}{\ell - u_*}$$



→ $u=u_*$ に sharp peak

→ eq. state!

なんで？



ここ$u=u_0$が、T=∞に相当。

米田：l は、これより大きければ多分OK.
これより小さくすると、大きなNでは問題が出る。

sharpだから、

$$u_* \simeq u_k \equiv \frac{\langle k|\hat{h}|k\rangle}{\langle k|k\rangle}$$

$u_k \searrow$ as $k \nearrow$

$\beta = \frac{2k}{N}\frac{1}{\ell - u_*}$ より、$k=\Theta(N)$ when $u_0 - u_k = \Theta(1)$

$\uparrow$
$T=\infty$

ちゃんとやる

注 異なるアンサンブルは、有限のNでは、ビミョーに異なる結果を与える。

→ $N<+\infty$で、$|k\rangle$といちばん合うensembleと比較しよう！

$$\rightarrow \hat{\rho}_k^{ens} \equiv \frac{1}{\mathrm{Tr}(\ )^{2k}}(\ell - \hat{h})^{2k}$$

と比較する。

(これもeq. ensembleであることは、typicalityよりわかる。)

ミクロカノニカルのエネルギー分布を滑らかにしたものだから、
PRL2012 では、smooth microcanonical ensemble と呼んだ。

これを用いて、

$$\langle \hat{A}\rangle_k^{TPQ} \equiv \frac{\langle k|\hat{A}|k\rangle}{\langle k|k\rangle}$$

$$\xrightarrow{P} \langle \hat{A}\rangle_k^{ens} \equiv \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_k^{ens}\hat{A}\right]$$

for $\forall$ m.v. $\hat{A}$ uniformly.

を示そう！

まず、 |z|^2の和を規格化してないので、計算が楽！

$$|0\rangle = \sum_\nu z_\nu |\nu\rangle$$

$$\overline{|z_\nu|^2} = 1$$

$$\overline{z_\mu^* z_\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

$$\overline{z_{\nu_1}^* z_{\nu_2} z_{\nu_3}^* z_{\nu_4}} = \delta_{\nu_1\nu_2}\delta_{\nu_3\nu_4} + \delta_{\nu_1\nu_4}\delta_{\nu_2\nu_3}$$

$$\overline{\langle 0|0\rangle} = \sum_{\mu,\nu} \overline{z_\mu^* z_\nu}\langle\mu|\nu\rangle = \sum_\nu \langle\nu|\nu\rangle = 1$$
$$= \dim\mathcal{H}$$

$$\overline{\langle 0|\hat X|0\rangle} = \sum_{\mu\nu}\overline{z_\mu^* z_\nu}\langle\mu|\hat X|\nu\rangle = \sum_\nu \langle\nu|\hat X|\nu\rangle = \mathrm{Tr}(\hat X)$$

$$\overline{\langle 0|\hat X|0\rangle^2} = \sum_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \overline{z_{\nu_1}^* z_{\nu_2} z_{\nu_3}^* z_{\nu_4}}\, \langle\nu_1|\hat X|\nu_2\rangle\langle\nu_3|\hat X|\nu_4\rangle = \mathrm{Tr}(\hat X^2) + \mathrm{Tr}(\hat X)^2$$

(注)。物理に出てくる $\hat X$ は
変なものもある！

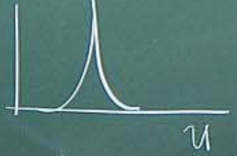
$$\hat X = \sigma(1)\cdot\sigma(2)\cdots\sigma(N)$$

↑ depends on $\dim\mathcal{H}$

・物理系特有の性質が
重要！

ex. $g(u) = e^{N\lambda(u)}$

$\hat h$: $e_1, e_2, e_3, \dots$



$$|k\rangle \equiv (l-\hat{h})^k|0\rangle$$

$|0\rangle$: random vector $\in \mathcal{H}$

$$\overline{\langle k|k\rangle} = \overline{\langle 0|\underbrace{(l-\hat{h})^{2k}}_{\hat{X}}|0\rangle} = \mathrm{Tr}\left[(l-\hat{h})^{2k}\right]$$

$$\overline{\langle k|\hat{A}|k\rangle} = \overline{\langle 0|\underbrace{(l-\hat{h})^k\hat{A}(l-\hat{h})^k}_{\hat{X}}|0\rangle}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(\ )^k\hat{A}(\ )^k\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(l-\hat{h})^{2k}\hat{A}\right]$$

$\hat{\rho}^{\mathrm{ens}}_k$

$$\therefore \frac{\overline{\langle k|A|k\rangle}}{\overline{\langle k|k\rangle}} = \frac{1}{\mathrm{Tr}\left[(\ )^{2k}\right]}\mathrm{Tr}\left[(\ )^{2k}\hat{A}\right]$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^{\mathrm{ens}}_k\hat{A}\right)$$

$$\equiv \langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{ens}}_k$$

しりたいのは、

$\dfrac{\langle k|\hat{A}|k\rangle}{\langle k|k\rangle} \equiv \langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{TPQ}}_k$ と $\langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{ens}}_k$ がどれくらいずれるか？ → Markov type ineq. で評価

正しいけど、ほぼ最悪のケースを想定したことになる。

$$\overline{\left(\langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{TPQ}}_k - \langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{ens}}_k\right)^2} \equiv D_A^2$$

$\langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{TPQ}}_k = \dfrac{\langle k|\hat{A}|k\rangle}{\langle k|k\rangle}$, $\langle\hat{A}\rangle^{\mathrm{ens}}_k = \dfrac{\overline{\langle k|\hat{A}|k\rangle}}{\overline{\langle k|k\rangle}}$

を計算すればいい。

小さい

$$\overline{\left(\frac{f}{g}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{f}+\delta f}{\bar{g}+\delta g}\right)} = \frac{\bar{f}}{\bar{g}} + \frac{1}{\bar{g}^2}\left(\frac{\bar{f}}{\bar{g}}\overline{\delta g^2} - \overline{\delta f\delta g}\right) + \cdots$$

$$\overline{\left(\frac{f}{g}-\overline{\left(\frac{f}{g}\right)}\right)^2} = \frac{\overline{\delta f^2}}{\bar{g}^2} - 2\frac{\bar{f}\cdot\overline{\delta f\delta g}}{\bar{g}^3} + \frac{\bar{f}^2\cdot\overline{\delta g^2}}{\bar{g}^4} + \cdots$$

を用いる。

$$\overline{\langle 0|\hat{X}|0\rangle^2} = \mathrm{Tr}(\hat{X}^2) + \left[\mathrm{Tr}(\hat{X})\right]^2$$

$$\overline{\langle 0|\hat{X}|0\rangle} = \mathrm{Tr}(\hat{X})$$

たとえば、

$$\overline{\left(\langle k|\hat{A}|k\rangle - \overline{\langle k|\hat{A}|k\rangle}\right)^2} = \overline{\langle k|\hat{A}|k\rangle^2} - \overline{\langle k|\hat{A}|k\rangle}^2$$

$$= \mathrm{Tr}\left[(l-\hat{h})^k\hat{A}(l-\hat{h})^{2k}\hat{A}(l-\hat{h})^k\right]$$

これらより.

$$\left|\frac{\langle k|A|k\rangle}{\langle k|k\rangle} - \frac{\langle k|\hat{A}|k\rangle}{\langle k|k\rangle}\right|$$

$$= \frac{\mathrm{Tr}(l-\hat{h})^{4k}}{\left[\mathrm{Tr}(l-\hat{h})^{2k}\right]^2}\left|\langle\hat{A}\rangle_k^{\mathrm{ene}} - \langle\hat{A}\rangle_{2k}^{\mathrm{ene}}\right|$$

+ smaller terms.

ここで,

$$\mathrm{Tr}(l-\hat{h})^{2k}$$

$$= \sum_n \langle n|(l-\hat{h})^{2k}|n\rangle$$

$$= \sum_n (l-e_n)^{2k}$$

$$= \int \underbrace{g(u)}_{= e^{N\beta(u)+o(N)}}(l-u)^{2k}\,du$$

$$= \int \exp\Big[N\underbrace{\Big\{\beta(u) + 2\frac{k}{N}\ln(l-u)\Big\}}_{\equiv\, \Xi_k(u)} + o(N)\Big]\,du$$

$$\frac{k}{N} \equiv \kappa = \Theta(1) \text{ for } \beta > 0.$$

$$\mathrm{Tr}(l-\hat{h})^{4k} = \int \exp\left[N\Xi_{2k}(u) + o(N)\right]du$$

$$\Xi_k' = \beta(u) - \frac{2\kappa}{l-u}$$

$\to 0$ at $u = u_k^*$ s.t.

前回はu_*とかいた

$$\beta(u_k^*) = \frac{2\kappa}{l-u_k^*}$$

山のてっぺんを決める式

$$\Xi_k'' = \underbrace{\beta'(u)}_{\leq 0} - \underbrace{\frac{2\kappa}{(l-u)^2}}_{>0} < 0$$

→ $\Xi_k(u)$は上に凸

→ uがu_k^*からはなれると,必ず小さくなる!

$$\Xi_k''' = \beta''(u) - \frac{4\kappa}{(l-u)^3}$$

$$\mathrm{Tr}(l-\hat{h})^{2k} = \int \exp\big[N\underbrace{\Xi_k(u)}_{\displaystyle \Xi_k(u_k^*) - \frac{1}{2}|\Xi_k''(u_k^*)|(u-u_k^*)^2 + \frac{1}{3!}\Xi_k'''(u_k^*)(u-u_k^*)^3 + \cdots} + o(N)\big]\,du$$

$$= \exp\left[N\Xi_k(u_k^*) + o(N)\right]$$

$$\mathrm{Tr}(l-\hat{h})^{4k} = \exp\left[N\Xi_{2k}(u_{2k}^*) + o(N)\right]$$

ゆえに、

$$\left| \frac{\overline{\langle k|A|k\rangle}}{\overline{\langle k|k\rangle}} - \frac{\overline{\langle k|A|k\rangle}}{\overline{\langle k|k\rangle}} \right|$$

$$= \frac{|\langle \hat{A}\rangle_k^{ens} - \langle \hat{A}\rangle_{2k}^{ens}|}{\exp\left(N\left[\underbrace{2\lambda(u_k^*) - \lambda(u_{2k}^*) + 4k\ln\left(\frac{l-u_k^*}{l-u_{2k}^*}\right)}_{\text{これが}\Theta(1)\text{であることを示そう!}}\right] + o(N)\right)}$$

roughには

$$\underbrace{\lambda(u_k^*)}_{\Theta(1)>0} + \underbrace{\lambda(u_k^*) - \lambda(u_{2k}^*)}_{\Theta(1)>0} + \underbrace{4k\ln\left(\text{---}\right)}_{\Theta(1)<0}$$

$$\ln\left(1+\frac{u_k^*-u_{2k}^*}{l-u_k^*}\right) \simeq \frac{u_k^*-u_{2k}^*}{l-u_k^*}$$

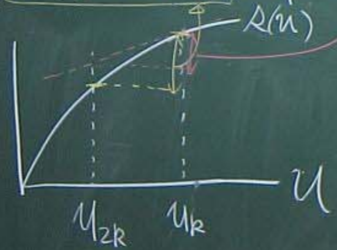
なので、まじめにやろう!

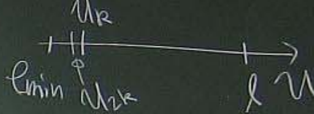
$$2\lambda(u_k^*) - \lambda(u_{2k}^*) + 4k\ln\left(\frac{l-u_{2k}^*}{l-u_k^*}\right)$$

$$4k = 2\beta(u_k^*)(l-u_k^*)$$

$$= 2\lambda(u_k^*) - \lambda(u_{2k}^*) - 2\beta(u_k^*)(u_k^*-u_{2k}^*)$$

$$= 2\left[\lambda(u_k^*) - \lambda(u_{2k}^*) - \beta(u_k^*)(u_k^*-u_{2k}^*)\right] + \lambda(u_{2k}) \geq \lambda(u_{2k}) = \Theta(1)$$





$$\therefore \left| \frac{\overline{(\ )}}{\overline{(\ )}} - \frac{\overline{(\ )}}{\overline{(\ )}} \right| \leq \frac{|\langle \hat{A}\rangle_k^{ens} - \langle \hat{A}\rangle_{2k}^{ens}|}{\exp\left[N\lambda(u_{2k}) + o(N)\right]} \leq \frac{\Theta(N^m)}{e^{\Theta(N)}} \xrightarrow[\text{TDL}]{} 0$$

今日のこうぎで skip したところ
→ 自分で!

$$D_A^2 \equiv \overline{\left(\frac{\langle k|A|k\rangle}{\langle k|k\rangle} - \overline{\frac{\langle k|A|k\rangle}{\langle k|k\rangle}} \right)^2}$$

$$\frac{\langle k|A|k\rangle}{\langle k|k\rangle} = \langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{TPQ}}, \quad \overline{\frac{\langle k|A|k\rangle}{\langle k|k\rangle}} = \langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{ens}}$$

$$\leq \frac{\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle_{2k}^{\mathrm{ens}} + \left(\langle \hat{A} \rangle_{2k}^{\mathrm{ens}} - \langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{ens}} \right)^2}{\exp\left[N \left\{ 2s(u_k^*) - s(u_{2k}^*) - 4K \ln\left(\frac{l - u_{2k}^*}{l - u_k^*} \right) \right\} + o(N) \right]} \leq \frac{同左}{\exp\left[N s(u_{2k}) + o(N) \right]} \leq \frac{\Theta(N^{2m})}{e^{\Theta(N)}} \xrightarrow{\mathrm{TDL}} 0.$$

∴ Markov type ineq. より

$$P\left(\left| \langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{TPQ}} - \langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{ens}} \right| \geq \varepsilon \right)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} D_A^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\langle\ \rangle + (\ -\ )^2}{\exp\left[N s(u_{2k}) + o(N) \right]}$$

$\leq 定 N^{2m}$

つまり、

$$\langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{TPQ}} \xrightarrow{P} \langle \hat{A} \rangle_k^{\mathrm{ens}}$$

となり、

$|k\rangle$ は TPQ state.