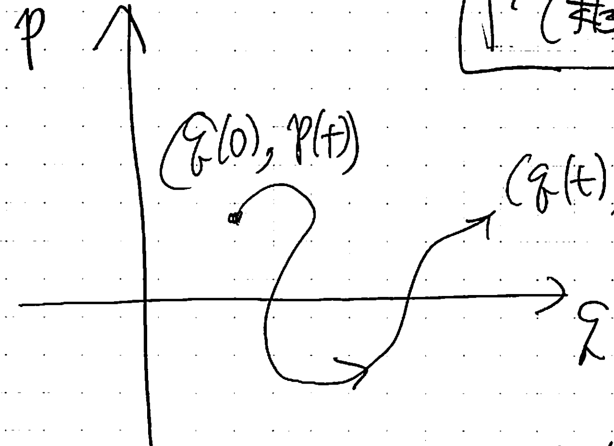
Ch. 再帰定理 (recurrence theorem)

§ 古典力学における rec. th. (Poincaré, 1890) ←「初期状態のいくらでも近くに、やがてはもどる。」

Γ (相空間)



ハミルトン力学

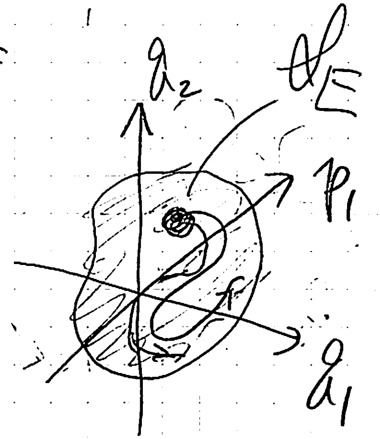
$$\begin{cases} q=(q_1, q_2, \cdots, q_f) \\ p=(p_1, p_2, \cdots, p_f) \end{cases}$$

$H(q,p)$ により、

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$ ⇐ $(q(0), p(0))$ から、$(q(t), p(t))$ が $\forall t$ について一意的に決まる!

等エネルギー面 S_E : $H(q,p)=E$ をみたす (q,p) の集合

→ (q,p) は S_E の上を運動する。



Th. S_E が有限(つまり、q も p も ∞ にはならない)とする。
S_E 内の $\forall$ 有限りょういき ε について、ε 内のほとんど全ての点は、無限回 ε に戻ってくる。

※ 周期的とは限らない。

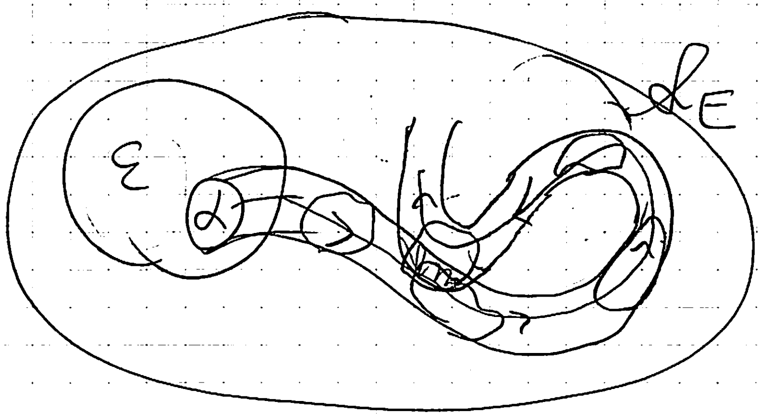
戻らない点を集めても測度(体積)はゼロ、というイミ。

(証)のアウトライン

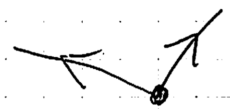
背理法を使う。

Σの中の有限りょういきαの中の、どの点も、Σの中には戻ってこないとする。

αの体積は、保存される (Liouville's theorem) から、$\mathcal{X}_E$ は有限なので、αの軌跡は、どこかで部分的に交叉する。



この交叉したりょういき内の点について、運動方程式を時間の負の向きへ解いてみると、同じ状態から2つの軌道が生まれてムジュンする。



→ αの体積は有限ではありえない!

§ 量子力学における rec. th. (Bocchieri & Loinger 1957, Percival 1961)

<u>Th.</u> energy eigenvalues が discrete な量子系 ($\Leftarrow V < +\infty,\ N < +\infty$ なるみなされる) の、どんな量子状態 $\hat{\rho}(0)$ でも、こりつ系の時間発展したとき、

$\forall \varepsilon > 0$ について $\exists T$ (infinitely many values in $-\infty < T < \infty$),

$\| \hat{\rho}(t+T) - \hat{\rho}(t) \| < \varepsilon$ for $\forall t$,

つまり、$\hat{\rho}(t)$ は "almost periodic" である。

※ 量子系だと準周期的!

(iii) のアウトライン

まず、$\hat{\rho}(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ のときを考える。

$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega_n|n\rangle$ を用いて、

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega_n t}|n\rangle$$

$$\| |\psi(T)\rangle - |\psi(0)\rangle \|^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (1-\cos\omega_n T)$$

ところで、T とムカンケイな N をもってくると、右辺を $\sum_{n=0}^{N}$ で近似できる。

$$\left(\because 2\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 (1-\cos\omega_n T) \leq 4\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \left(\because \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 = 1\right)\right)$$

十分大きな N と小さな δ を選び、T を、

$$|\omega_n T - 2\pi \times 整数| < \delta \quad \text{for } 0 \leq {}^\forall n \leq N,$$

← n ごとに異なっていい。

をみたすように選ぶ。すると $1-\cos\omega_n T < \frac{\delta^2}{2}$ だから、

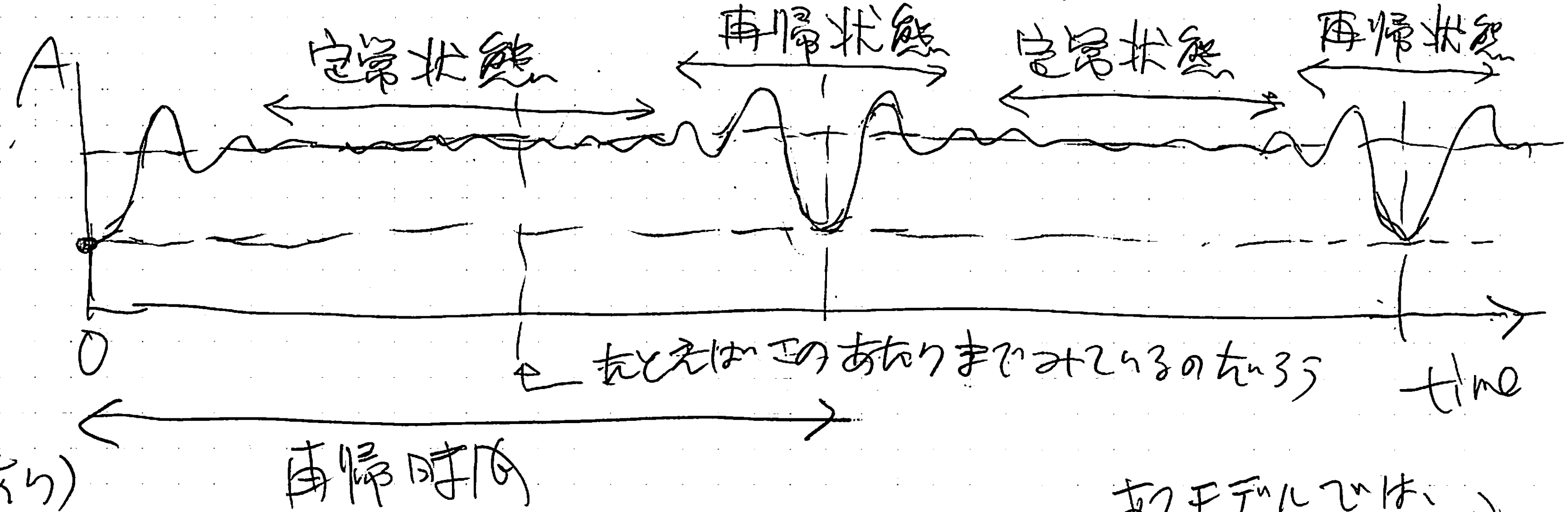
$$2\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 (1-\cos\omega_n T) < \delta^2 \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 < \delta^2. \rightarrow \psi(t) は \text{ almost periodic!}$$

$\hat{\rho}(0)$ が mixed state のときも、almost periodic な $|\psi(0)\rangle$ の混合だから同様。

(統)の mechanical variable: Aは、(q, p)の任意多項も（(量)では $\hat{A} = A(\hat{q}, \hat{p})$）

⇒ A(q, p)の値は、元の値のいくらでも近くに、無限回、もどってくる。

イメージ図



proofではない

↓

期待（evidencesもあり）

・{ 系の自由度fが大きい / 系の異細がみたされる } ならば、$f \to \infty$ で 再帰時間 $\to \infty$ だろう。

あるモデルでは、$\exp(O(f))$

← この条件をみたさない系の例

ex. 同じωの調和振動子の集まり → 再帰時間 $= 2\pi/\omega = O(1)$

・その場合、定常状態の時間 ≫ 再帰状態の時間、だろう

・　〃　、定常状態が、物理的なイミがある eq. state だろう。

∴物理は、時間スケールが重要。eq. state も同様（c.f.「熱力学の基礎」§1.1, §6.2）

（∴ならば、定常状態における平均値 ＝ 長時間平均だろう → 長時間平均で代用すること多い）

・そもそも、そんなに長時間、とりつ系ではいられないから、再帰はしないだろう → 不可逆性