であったが，$\mathcal{E}(E)$ は，その中の $H(q,p)=E$ を満たす点だけを集めた領域だから，その次元 $\dim \mathcal{E}(E)$ は，$\dim \Gamma$ よりも条件式の数 (=1 本) だけ下がった

$$\dim \mathcal{E}(E) = \dim \Gamma - 1 = 2f - 1 \tag{3.14}$$

である．もとの空間よりも次元が低い領域なので，これは広義の「面」である[8)]．そこで，$\mathcal{E}(E)$ を**等エネルギー面** (equi-energy surface) と呼ぶ．(3.11) より，運動方程式の解 $(q(t), p(t))$ が描く軌道は，この $\mathcal{E}(E)$ の中にすっぽり入っている：

古典力学：相空間内の軌道と等エネルギー面
相空間内で，系の状態を表す点が描く軌道は，等エネルギー面の中にある．

次節以降で具体例が登場するので，それを見るとイメージがわくだろう．

問題 3.1　(3.9) 式を示せ.

3.4　線形振動子と可積分系

ハミルトニアンが q,p の 2 次式である場合は，ハミルトンの運動方程式 (3.5), (3.6) は q,p の 1 次式になる．このとき，運動方程式が**線形** (linear) である，と言い，そのような系を**線形振動子** (linear oscillator) とか**調和振動子** (harmonic oscillator) と呼ぶ．バネに繋がった質点や時計の振り子など，非常に多くの系で力学的平衡点のまわりの微小な振動は線形振動子で近似できるため，物理には線形振動子がよく登場する．そこで本節では，まず線形振動子の運動を説明し，その結果から，線形振動子を含む「可積分系」と呼ばれる特殊な系の特徴を概観する．

3.4.1　1 自由度の線形振動子

手始めに，自由度 $f=1$ の場合を考えよう．その場合の線形振動子のハミルトニアンは，（q,p の原点などを適当に調整し，運動方程式に影響しない H の

8)　たとえば，3 次元空間で，$x^2+y^2+z^2=1$ という条件式を満たす領域は，$3-1=2$ 次元の領域である球面であった.

原点を適当に選ぶと）$H(q,p) =$ 定数 $\times p^2 +$ 定数 $\times q^2$ である．この定数を次のように書くと便利である：

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \tag{3.15}$$

バネ振り子の場合は，m は質点の質量で，ω はバネ定数 k と $\omega^2 = k/m$ という関係にある正定数である．すると，ハミルトンの運動方程式は,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = \frac{p}{m}, \tag{3.16}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = -m\omega^2 q, \tag{3.17}$$

となり，たしかに q, p の 1 次式になっている．もちろん，両式から p を消去すればニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -m\omega^2 q \tag{3.18}$$

が得られるのだが，ここでは q, p で考える．ハミルトンの運動方程式の解は,
A, θ を初期条件で決まる実定数として,

$$q(t) = A\sin(\omega t + \theta), \quad p(t) = Am\omega\cos(\omega t + \theta). \tag{3.19}$$

これは，q, p が角周波数 ω できれいに振動することを示している．このような運動を**調和振動** (harmonic oscillation) とか**単振動**と言う．

調和振動の，**相空間における軌道**は，図@のように楕円になる．また，等エネルギー面 $\mathcal{E}(E)$ を定義する式

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = E \tag{3.20}$$

も，楕円を表す式になっている．この $f = 1$ の単純な系では軌道と $\mathcal{E}(E)$ は完全に一致しているが，後で見るように，一般にはこうはならない．また，定数（エネルギーの値）E は，$\mathcal{E}(E)$ の半径の自乗に比例するから，**$\mathcal{E}(E)$ のサイズは，E が大きいほど大きい**．この事実は，自由度が巨大で非線形な相互作用があるマクロ物理系でも一般に成り立つ，ということを 6.3 節で見る．

3.4.2　多自由度の線形振動子系と可積分系

図@のように，1次元空間内を運動する N $(\gg 1)$ 個の粒子が，バネで繋がっている系を考える．これらの粒子の位置座標を $q_1, q_2, \cdots, q_N$，ばね定数を K，粒子の質量を m とすると，この系のハミルトニアンは

$$H(q,p) = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{K}{2} (q_{j+1} - q_j)^2 \right]. \tag{3.21}$$

ただし，**周期境界条件** (periodic boundary condition) と呼ばれる，

$$q_{N+j} = q_j \quad \text{for all } j \tag{3.22}$$

という**境界条件** (boundary condition) を課す[9]．この条件は，粒子がバネで繋がって大きな円環を成していると考えてもいいし，後に説明するように統計力学の結果が境界条件に依らないことを利用して，計算の便利のための仮想的な条件を課したと思ってもよい．

粒子 j の位置と運動量 q_j, p_j について，ハミルトンの運動方程式を求めて p_j を消去すると，

$$m \frac{d^2 q_j}{dt^2} = K(q_{j+1} - q_j) - K(q_j - q_{j-1}) \tag{3.23}$$

となる．右辺に他の粒子の位置座標 q_{j+1}, q_{j-1} が入っている（つまり，粒子間の相互作用がある）ので，一見すると，1自由度系よりずっと複雑な運動をするようにも見える．しかし実際は，この運動方程式は線形なので，**基準座標** (normal coordinate) と呼ばれるうまい座標を導入すれば1自由度系に帰着する[10]．

具体的には，粒子たちが力学的平衡にあるときの粒子間隔を a とし，様々な値をとりうる（どんな値が許されるかはあとで決める）実数パラメーター k を導入して，

$$Q_k \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-ikaj} q_j \tag{3.24}$$

9)　たとえば，$j > N$ でも $q_{N+1} = q_1$ などとなるし，$j \le 0$ でも $q_0 = q_N$，$q_{-1} = q_{N-1}$ という具合に，j は全ての整数が許されるようになる．

10)　これは，振動波動や解析力学の教科書に解説されているように，数学的には「二次形式の対角化」という問題に帰着する．

と置いてみる．これは複素数値をとるが，必要なら実部と虚部を取り出せば実数になるし，あとで量子力学の計算をするときに便利なので，このまま計算する．Q_k の 2 階微分を (3.23) を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} m\frac{d^2Q_k}{dt^2} &= K\sum_{j=1}^{N} e^{-ikaj}\left[(q_{j+1}-q_j)-(q_j-q_{j-1})\right] \\ &= -m\omega_k^2 Q_k \end{aligned} \tag{3.25}$$

を得る．ただし，

$$\omega_k \equiv \sqrt{\frac{4K}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| \tag{3.26}$$

とおいた．(3.25) は 1 自由度のときの運動方程式 (3.18) と同じ形をしており，異なる k を持つ Q_k とは相互作用していない．そのため，解は容易に求まる．この Q_k たちが，この系の基準座標である．

もとの座標 q_j の運動を知りたければ，(3.24) を逆に解いた [11)]

$$q_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{ikaj}Q_k \tag{3.27}$$

に，Q_k の解を代入すればよい．ここで，パラメーター k がとりうる値は周期境界条件 (3.22) で決まり，

$$k = \frac{2\pi}{Na}\times \text{整数} \tag{3.28}$$

となる．ただし，k と $k\pm\dfrac{2\pi}{a}$ はまったく同じ q_j を与えるので，重複を避けるために，k を

$$-\frac{\pi}{a} < k \le \frac{\pi}{a} \tag{3.29}$$

の範囲に制限する．すると，k がとりうる値の種類は $(2\pi/a)/(2\pi/Na) = N$ 個になる．(3.27) の k の和は，この N 個の k にわたる和である．また，元の q_j が実数であることから，(3.24) より

$$Q_k^* = Q_{-k} \tag{3.30}$$

11)　これは (3.30) より自動的に実数になる

となるので，Q_k たちの実部と虚部のうち独立なものの個数は，ちょうどもとの座標の個数 N と一致する[12)]．

さらに，Q_k に対応する運動量[13)]

$$P_k \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{ikaj} p_j \tag{3.31}$$

も導入し，ハミルトニアンを Q_k, P_k で表すと，

$$H(Q,P) = \sum_k H_k(Q_k, P_k) \tag{3.32}$$

$$H_k(Q_k, P_k) = \frac{1}{2m}|P_k|^2 + \frac{m\omega_k^2}{2}|Q_k|^2 \tag{3.33}$$

のように，単純な和になる．そのため，エネルギー保存則も，H についての通常の全エネルギー保存則

$$H(Q,P) = E = \text{一定}, \tag{3.34}$$

だけでなく，それぞれの H_k についても成り立つ：

$$H_k(Q_k, P_k) = E_k = \text{一定}. \tag{3.35}$$

ただし，H と H_k は (3.32) で結び付いているので独立な関数ではなく，その値も

$$E = \sum_k E_k \tag{3.36}$$

のように結びついている．したがって，H と H_k のうちで独立なのは N 個である．これは，自由度 f に等しい数だ．この系は，**自由度の数だけ（$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ の素直な関数で，互いに独立な）保存量がある系**になっているわけだ[14)]．一般に（今考察しているような線形な力学系に限らず)，そのような系を，**可積分系** (integrable system) と呼ぶ[15)]．

問題 3.2　上記の途中の計算をやってみよ．

---

12)　たとえば，Q_k, Q_{-k} の実部と虚部は 4 個あるが，それらの間に $\mathfrak{Re}Q_k = \mathfrak{Re}Q_{-k}$，$\mathfrak{Im}Q_k = -\mathfrak{Im}Q_{-k}$ という 2 つの関係式があるので，独立なのは 2 個だけである．つまり，1 個の複素変数 Q_k あたり 1 個の実変数が独立である．

13)　解析力学の用語を用いて正確にいうと，P_k は Q_k に「正準共役な」運動量である．

14)　「素直な」というのは，特異性がある関数ではない，というぐらいに思って欲しい．

15)　「可積分系」の定義はいろいろあり，ここに述べた定義はそのうちのひとつである．